（減衰振動）filename=damptvibration4-qa080529a.tex

つりあいの位置からの変位 x に比例する復元力（$F(x) = -kx; k = \text{constant}$）を受けている粒子（（質量 m）に速度に比例する抵抗力（$-2\gamma m dx/dt; \gamma = \text{constant}$）が働いているとする。次の問いに答えよ。

1. この粒子が従う運動方程式を書け。
2. 定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えて、$\gamma = \sqrt{3}\omega_0$ の場合に、一般解を求め、時間 t を横軸に、変位 x を縦軸にして概略グラフを描いて、この運動の特徴を説明せよ。

（解答例）

1.
$$m(\frac{d^2x}{dt^2}) = -kx - 2m\gamma(\frac{dx}{dt}). \tag{1}$$

2. 解の候補として、一般に $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて、未定の定数 λ を決める。まず、この関数を時間で１回、２回微分すると
$$\frac{dx}{dt} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \ \ \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{2}$$
式（2）を (1) に代入すると
$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0, \tag{3}$$
$$\rightarrow \ \ \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{4}$$
２次方程式の根と係数の関係より
$$\begin{aligned} \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \ (\gamma = \sqrt{3}\omega_0) \\ &= -\sqrt{3}\omega_0 \pm \sqrt{2}\omega_0. \end{aligned} \tag{5}$$
以上の二つの解に適当な係数（c_1, c_2）を用いて、一般解が次のように表される。
$$x = c_1 \mathrm{e}^{(-\sqrt{3}\omega_0 + \sqrt{2}\omega_0)t} + c_2 \mathrm{e}^{(-\sqrt{3}\omega_0 - \sqrt{2}\omega_0)t}. \tag{6}$$
今の場合は減衰振動ではなく、過減衰である。(グラフ描画は省略。)