（減衰振動; 弱抵抗）finename=damptvibration1-qa921221.tex

つりあいの位置からの変位 x に比例する復元力（$F(x) = -kx; k = $ 一定）を受けている粒子（質量 m）に速度に比例する抵抗力（$-2\gamma m dx/dt; \gamma = $ 一定）が働いているとする。次の問いに答えよ。

1. この粒子が従う運動方程式を書け。
2. 定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えて、$\gamma = \sqrt{3}\,\omega_0/2$ の場合に、一般解を求め、時間 t を横軸に、変位 x を縦軸にして概略グラフを描いて、この運動の特徴を説明せよ。

（解答例）

1.
$$m(\frac{d^2x}{dt^2}) = -kx - 2m\gamma(\frac{dx}{dt}). \tag{1}$$

2. 解の候補として、一般に $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて、未定の定数 λ を決める。まず、この関数を時間で１回、２回微分すると
$$\frac{dx}{dt} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t},\ \ \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{2}$$
式（2）を (1) に代入すると
$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0, \tag{3}$$
$$\rightarrow\quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{4}$$
２次方程式の根と係数の関係より
$$\begin{aligned}\lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\ \ (\gamma = \sqrt{3}\,\omega_0/2) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 \pm i\frac{\omega_0}{2}. \end{aligned}\tag{5}$$
以上の二つの解に適当な係数（c_1, c_2）を用いて、一般解が次のように表される。
$$\begin{aligned} x &= c_1\mathrm{e}^{(-\sqrt{3}\omega_0/2 + i\omega_0/2)t} + c_2\mathrm{e}^{(-\sqrt{3}\omega_0/2 - i\omega_0/2)t} = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}\omega_0 t/2} \times (c_1\mathrm{e}^{i\omega_0 t/2} + c_2\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2}) \\ &= \mathrm{e}^{-\sqrt{3}\omega_0 t/2} \times [(c_1 + c_2)\cos(\omega_0 t/2) + i(c_1 - c_2)\sin(\omega_0 t/2)] \\ &\qquad (\text{ここで, オイラーの公式 } \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ を用いた。}) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\omega_0 t/2}[\cos(\omega_0 t/2)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sin(\omega_0 t/2)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}] \\ &\qquad (a \equiv c_1 + c_2, b \equiv i(c_1 - c_2)) \\ &= A\mathrm{e}^{\frac{-\sqrt{3}\omega_0 t}{2}} \cdot \cos(\frac{\omega_0 t}{2} + \alpha),\ (A \equiv \sqrt{a^2+b^2},\ \tan\alpha \equiv -\frac{b}{a}). \end{aligned}\tag{6}$$
この式に表されているように振幅が時間とともに指数関数的に減衰する。
（グラフ描画は省略。）