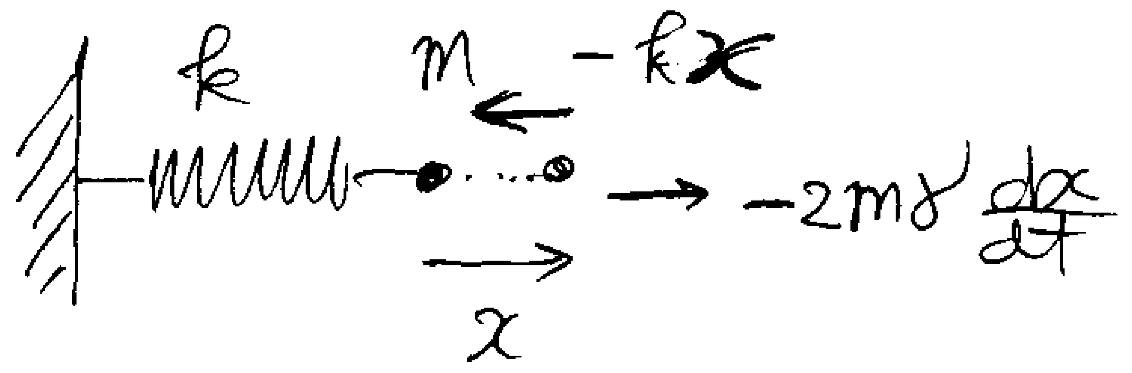
3

（減衰振動）

つりあいの位置からの変位 x に比例する復元力（$F(x) = -kx; k = \mathrm{constant}$）を受けている粒子（（質量 m）に速度に比例する抵抗力（$-2\gamma m dx/dt; \gamma = \mathrm{constant}$）が働いているとする。次の問いに答えよ。

1. この粒子が従う運動方程式を書け。
2. 定数を $k/m \equiv \omega_0^2$ と置き換えて、$\gamma = \omega_0$ の場合に、一般解を求め、時間 t を横軸に、変位 x を縦軸にして概略グラフを描いて、この運動の特徴を説明せよ。

(解)



1.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\gamma\frac{dx}{dt} \quad \cdots (1)$$

2.

(1)より

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\gamma = \omega_0$ であるから

$$\ddot{x} + 2\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \cdots (2)$$

解を $x = e^{\lambda t}$ とおく（λ:未定定数）(1) に代入する。

$$(\lambda^2 + 2\omega_0\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

$\rightarrow \lambda = -\omega_0$（重根）。

特解の1つは $e^{-\omega_0 t} \equiv x_1(t)$ とおける。

しかし、2階の微分方程式の一般解には2つ目の特解が必要である。2番目の特解を $x_2 \equiv \underbrace{e^{-\omega_0 t}\cdot f(t)\ (f(t):t\text{の関数})}$ とおいて (2) に代入する。

$$\dot{x}_2 = (-\omega_0 \cdot f(t) + \dot{f})e^{-\omega_0 t},$$

$$\ddot{x}_2 = (\ddot{f} - 2\omega_0\dot{f} + \omega_0^2 f)e^{-\omega_0 t}$$

$$(\ddot{f} - 2\omega_0\dot{f} + \omega_0^2 f)$$

$$+ 2\omega_0(-\omega_0 f + \dot{f}) + \omega_0^2 f = 0$$

$\rightarrow \ddot{f} = 0$.

$\therefore f(t) = at + b$ （a, b:積分定数）

一般解

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (c_1, c_2:\text{定数})$$

$$= c_1 e^{-\omega_0 t} + c_2 (at + b)e^{-\omega_0 t}$$

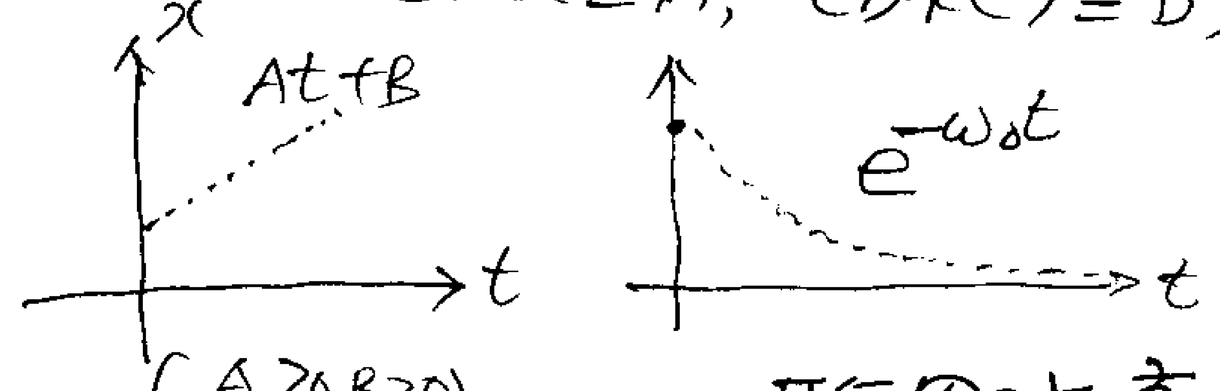
$$= (c_2 a t + (b + c))\cdot e^{-\omega_0 t}$$

$\therefore$

$$x = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

（A, B:定数）

（$c_2 \cdot a \equiv A$, $(b + c) \equiv B$）



（A>0, B>0 のとき）

臨界減衰

$\therefore$ $A>0$, $B>0$ の場合