(棒の質量中心),filename= cm-of-rod-qa060726b.tex

質量 M 長さ L の剛体棒がある。（ある点の近傍の）単位長さあたりの質量を線密度という。この棒の線密度 λ が位置 x とともに変化する（$\lambda = \alpha x, (\alpha : \text{constant})$）と仮定する。

1. この棒の全質量 M を計算することにより、M を α, L で表す関係式を求めよ。
2. この棒の質量中心の x 座標 X 座標を計算することにより、X を α, L, M で表す関係式を求めよ。
3. 質量中心の x 座標 X 座標を L と分数で表す関係式を求めよ。

(解答例)

n 個の粒子からなる多粒子系の全質量 M と重心の x 座標 X は次のように表される。

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{1}$$

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{2}$$

剛体は質量が連続的に分布している多粒子系と見なせるので、和の記号を積分記号に置き換えるとよい。

1. この棒の左端を x 軸の原点に選び、位置 x から $x + dx$ の幅を粒子と見なすと、その微小部分の質量 $dm = \lambda dx$ であるから

$$\begin{aligned} M &= \int_{x=0}^{x=L} dm = \int_0^L \lambda dx = \alpha \int_0^L x dx \\ &= \frac{\alpha L^2}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

   が得られる。
2. 同様にして、重心の定義式より

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx \\ &= \frac{\alpha L^3}{3M} \end{aligned} \tag{4}$$

   が求まる。
3. M の式を X の関係式に代入して

$$\begin{aligned} X &= \frac{\alpha L^3}{(\frac{3\alpha L^2}{2})} \\ &= \frac{2L}{3}. \end{aligned} \tag{5}$$