

質量 M 長さ L の剛体棒がある。この棒の線密度 λ が長さ x とともに変化する ($\lambda = \alpha x$, ($\alpha : \text{constant}$)) と仮定する。質量中心の x 座標 x_{CM} 座標を L と分数で表す関係式を求めよ。

(解答例)

この棒の左端 x 軸の原点に選び、原点から位置 x の点における長さ dx の線要素の質量 $dm = \lambda dx$ である。それゆえ、質量中心の x 座標 x_{CM} は

$$\begin{aligned}x_{\text{CM}} &= \frac{1}{M} \int_0^L x dm \\&= \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx \\&= \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx \\&= \frac{\alpha L^3}{3M}.\end{aligned}\tag{1}$$

また、全質量は次の関係式を通じて α に関係しているので、 α を消去できる。

$$\begin{aligned}M &= \int dm \\&= \int_0^L \lambda dx \\&= \alpha \int_0^L x dx \\&= \frac{\alpha L^2}{2}.\end{aligned}\tag{2}$$

これを x_{CM} の関係式に代入して

$$\begin{aligned}x_{\text{CM}} &= \frac{\alpha L^3}{\left(\frac{3\alpha L^2}{2}\right)} \\&= \frac{2L}{3}.\end{aligned}\tag{3}$$