

あるバンジージャンパー（質量 m ）が川の上、45.0m の橋の上にいる。弾性的なバンジーロープは、その自然長は L でフックの法則に従い、ばね定数は k とする。ジャンパーが橋から静かに落ちて、ロープが自然長より d だけ伸びて水面より上で止まる場合を考える。重力加速度の大きさを g とする。

1. ジャンパー-地球-ロープ系は孤立系とみなせると仮定し、力学的エネルギーが保存するとする。ジャンパーの運動エネルギー変化を ΔK 、ジャンパーの弾性による位置エネルギー変化を ΔU_e 、ジャンパーの重力による位置エネルギー変化を ΔU_g とするとき、これらの間に成立する関係式を記せ。
2. 位置エネルギー変化、 $\Delta U_e, \Delta U_g$ を与えられた文字式で記せ。
3. このジャンパーが初めと終わりで静止しているとして、力学的エネルギー保存則を与えられた文字式を使って記せ。
4. $m = 61.0\text{kg}, L = 25.0\text{m}, k = 160\text{N/m}, g = 9.8\text{m/s}^2$ として、もっとも低い点での、自然長からの伸び d と、ジャンパーの水面からの高さ h を計算せよ。

(解答例)

1. 力学的エネルギー保存則より

$$\Delta K + \Delta U_e + \Delta U_g = 0. \quad (1)$$

2. ジャンパーの高さの変化を Δy とすると

$$\Delta U_g = mg\Delta y = -mg(L + d). \quad (2)$$

また、バンジーロープは d だけ伸びているので、

$$\Delta U_e = \frac{1}{2}kd^2. \quad (3)$$

3. 式 (1),(2),(3) より、 $\Delta K = 0$ だから、

$$0 + \frac{1}{2}kd^2 - mg(L + d) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}kd^2 - mgd - mgL = 0 \quad (4)$$

となり、未知数 d についての 2 次方程式である。2 次方程式の根と係数の関係より

$$d = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgL}}{k}. \quad (5)$$

プラスとなる値を解として選び、関連する量について与えられた値を代入すると

$$\begin{aligned} d &= \frac{61\text{kg} \cdot 9.8\text{ms}^{-2} + \sqrt{(61\text{kg} \cdot 9.8\text{ms}^{-2})^2 + 2 \times 160\text{Nm}^{-1} \times 61\text{kg} \cdot 9.8\text{ms}^{-2} \cdot 25\text{m}}}{160\text{Nm}^{-1}} \\ &= 17.9\text{m}. \end{aligned} \quad (6)$$

題意より、このジャンパーは初期位置から、 $(L + d) = 42.9\text{m}$ 下にあるので、

$$h = 45.0\text{m} - 42.9\text{m} = 2.1\text{m}. \quad (7)$$