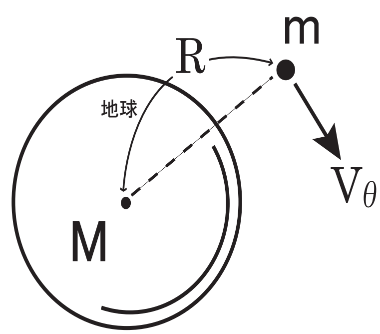
地球の密度を一定の球であると仮定すると、地球と人工衛星の間の万有引力 (重力) は、地球の質量 (M) が、その中心に集中した場合の万有引力と近似できるとする。次の問いに答えよ。

1. 地球の中心から半径 R の円軌道を周回する質量 m の人工衛星の (地球の中心に対する) 角運動量の大きさ ℓ を R, M, m と重力定数 G で表す関係式を求めよ。
2. 全問と同じ条件で、人工衛星の運動エネルギー K、位置エネルギー U 及び力学的エネルギー E を R, M, m で表す関係式を求めよ。
3. 円または円に近い軌道を持つ人工衛星に対して、大気の抵抗により、進行衛星の半径 R、速さ v はどうなるか理由を述べて説明せよ。

(解答例) 1. 円周方向の速度を v_θ とすると角運動量の定義より

$$\ell = R \cdot m v_\theta. \qquad (1)$$



動径方向の運動方程式は

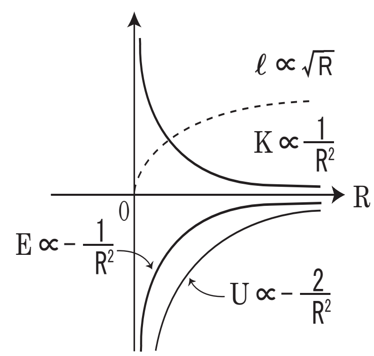
$$m \cdot \frac{v_{\theta^2}}{R} = G \cdot \frac{Mm}{R^2}, \qquad (2)$$
$$\rightarrow v_\theta = \sqrt{G\frac{M}{R}}. \qquad (3)$$

式 (3) に式 (1) を代入すると

$$\therefore \ \ell = \sqrt{GMm^2}\sqrt{R}. \qquad (4)$$

2.

$$K = \frac{1}{2} m v_\theta^2 \ , \ U = -G\frac{Mm}{R} \ , \ E = K + U. \ (5)$$



式 (1) より

$$v_\theta = \frac{\ell}{mR}, \qquad (6)$$

式 (3) に式 (1) を代入すると

$$K = \frac{\ell^2}{2mR^2} > 0 \ , \ U = (-1) m v_\theta^2 = -2K = -\frac{\ell^2}{mR^2} < 0 \ , \ E = -K = \frac{1}{2}U = -\frac{\ell^2}{2mR^2} < 0. \ (7)$$

3. 空気の抵抗により力学的エネルギー E が減少する。ここで、式 (7) に式 (5) を代入すると

$$E = \frac{1}{2}U = -\left(\frac{GMm}{2}\right)\frac{1}{R^2} \rightarrow R : 減少 \qquad (8)$$

式 (7) に式 (8) の運動エネルギー K について用いると

$$K : 増加 \rightarrow 速さは増加$$

従って、K の増加の 2 倍だけ U が減少し、力学的エネルギー E が減少する。

コメント：抵抗により運動エネルギーが減少するとは限らない。非抵抗の場合も運動エネルギーが減少して、その分、位置エネルギーが増加する。