filename=angler-renshu3-4-qa050929.tex

$xy$ 平面上の運動の場合、質点 (物体) の角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ と力のモーメントベクトル $\boldsymbol{N}$ は $z$ 方向を向いていることを次の手順で示せ。

1. 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$、力のベクトル $\boldsymbol{F}$ を基本ベクトルを用いて表せ。
2. 角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ と力のモーメントベクトル $\boldsymbol{N}$ の $x, y, z$ 成分を計算せよ。

(解答) (1)

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\ ,\ \boldsymbol{p} = p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j}\ ,\ \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}\ ,\ (z = 0\ ,\ p_z = 0\ ,\ F_z = 0).$$

(2) 定義より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &\equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \\ &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})\times(p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j}) \\ &= xp_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}) + xp_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) + yp_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}) + yp_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}) \\ &= \boldsymbol{k}(xp_y - yp_x), \end{aligned}$$

となる。また力のモーメントベクトル $\boldsymbol{N}$ の定義より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} &\equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \\ &= xF_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}) + xF_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) + yF_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}) + yF_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}) \\ &= \boldsymbol{k}(xF_y - yF_x), \end{aligned}$$

となる。

３次元運動の場合、ある質点 (物体) の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} = (x, y, z) &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) &= p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

のとき、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ はどのように表されるか。

(解答) 定義より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &\equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \\ &= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\times(p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{i}(yp_z - zp_y) + \boldsymbol{j}(zp_x - xp_z) + \boldsymbol{k}(xp_y - yp_x), \end{aligned}$$

となる。