（バネでつながれた2粒子系への粒子の衝突）3bodycollision-qa070111.tex
質量mの２つの粒子がバネでつながれて初め静止している。(例えば、２原子分子の模型)。質量Mの粒子1が初速度v_0で,バネでつながれた2粒子系（粒子2、粒子3）の粒子2と弾性的に衝突したとする。粒子2と3の質量は同じmであるとする。衝突が直線上（一次元的に）起こるとして次の問いに答えよ。

1. 初めとその後の状況の物理的な特徴を図示せよ。
2. 粒子1と2の衝突直後のそれぞれの速度、v_0', u'を求めよ。
3. この衝突により、2粒子系（粒子2、粒子3）は運動し始める。このとき、2粒子系の重心の並進速度Vを求めよ。
4. この衝突の前後における並進運動エネルギーの変化ΔKを求め, その値がゼロでなければ、このエネルギーはどうなったかを述べよ。

(解答例)

1. 図は近日中に追加予定。
2. 粒子1と2の衝突前後の運動量保存則より

$$Mv_0 \quad = \quad Mv_0' + mu'. \tag{1}$$

粒子１と粒子２は弾性的に衝突するので、運動エネルギーの和が保存される：

$$\frac{1}{2}M{v_0}^2 \quad = \quad \frac{1}{2}M{v_0'}^{\,2} + \frac{1}{2}m{u'}^{\,2}. \tag{2}$$

式(1)と(2)を書き直して

$$M(v_0 - v_0') \quad = \quad mu', \tag{3}$$

$$M(v_0 - v_0')(v_0 + v_0') \quad = \quad m{u'}^{\,2}. \tag{4}$$

式（4）を（3）で割ると

$$v_0 + v_0' \quad = \quad u'. \tag{5}$$

式（3）と（5）より

$$v_0' \quad = \quad \left(\frac{M-m}{M+m}\right)v_0, \tag{6}$$

$$u' \quad = \quad \left(\frac{2M}{M+m}\right)v_0. \tag{7}$$

3. 2粒子系（粒子2+粒子3）についての運動量保存側より

$$mu' \quad = \quad (2m)V. \tag{8}$$

式（7）と（8）より

$$V \quad = \quad \left(\frac{M}{M+m}\right)v_0. \tag{9}$$

4. $\{1+(2+3)\}$ 粒子系の並進の運動エネルギーの変化の定義式に式（7）,(9) を用いると

$$\begin{aligned}
\Delta K &= \left[\frac{1}{2}Mv_0'^{\,2} + \frac{1}{2}(2m)V^2\right] - \frac{1}{2}M{v_0}^2 \\
&= \frac{1}{2}M(v_0'+v_0)(v_0'-v_0) + mV^2 \\
&= -\frac{1}{2}m\left(\frac{2M}{M+m}\right)^2 {v_0}^2 + m\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 {v_0}^2 \\
&= \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(\frac{M}{M+m}\right)^2(-4+2) \\
&= -\left(\frac{M}{M+m}\right)^2 m{v_0}^2 < 0. \qquad (10)
\end{aligned}$$

という結果が得られ、衝突により並進の運動エネルギーは失われることを意味する。（備考）失われたエネルギー (の大きさ）$|\Delta K|$ は粒子２と３の間のバネの振動エネルギー（＝運動エネルギー+弾性によるポテンシャルエネルギー）に転化したことになる。