

質量 m の2つの粒子がバネでつながれて初め静止している。(例えば、2原子分子の模型)。質量 M の粒子1が初速度 v_0 で、バネでつながれた2粒子系(粒子2、粒子3)の粒子2と弾性的に衝突したとする。粒子2と3の質量は同じ m であるとする。衝突が直線上(一次的に)起こるとして次の問いに答えよ。

1. 初めとその後の状況の物理的な特徴を図示せよ。
2. 粒子1と2の衝突直後のそれぞれの速度、 v'_0, u' を求めよ。
3. この衝突により、2粒子系(粒子2、粒子3)は運動し始める。このとき、2粒子系の重心の並進速度 V を求めよ。
4. この衝突の前後における並進運動エネルギーの変化 ΔK を求め、その値がゼロでなければ、このエネルギーはどうなったかを述べよ。

(解答例)

1. 図は近日中に追加予定。
2. 粒子1と2の衝突前後の運動量保存則より

$$Mv_0 = Mv'_0 + mu'. \quad (1)$$

粒子1と粒子2は弾性的に衝突するので、運動エネルギーの和が保存される：

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv'^2_0 + \frac{1}{2}mu'^2. \quad (2)$$

式(1)と(2)を書き直して

$$M(v_0 - v'_0) = mu', \quad (3)$$

$$M(v_0 - v'_0)(v_0 + v'_0) = mu'^2. \quad (4)$$

式(4)を(3)で割ると

$$v_0 + v'_0 = u'. \quad (5)$$

式(3)と(5)より

$$v'_0 = \left(\frac{M-m}{M+m} \right) v_0, \quad (6)$$

$$u' = \left(\frac{2M}{M+m} \right) v_0. \quad (7)$$

3. 2粒子系(粒子2+粒子3)についての運動量保存則より

$$mu' = (2m)V. \quad (8)$$

式(7)と(8)より

$$V = \left(\frac{M}{M+m} \right) v_0. \quad (9)$$

4. $\{1 + (2 + 3)\}$ 粒子系の並進の運動エネルギーの変化の定義式に式 (7), (9) を用いると

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= \left[\frac{1}{2} M v_0'^2 + \frac{1}{2} (2m) V^2 \right] - \frac{1}{2} M v_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} M (v_0' + v_0)(v_0' - v_0) + m V^2 \\
 &= -\frac{1}{2} m \left(\frac{2M}{M+m} \right)^2 v_0^2 + m \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 v_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 (-4 + 2) \\
 &= -\left(\frac{M}{M+m} \right)^2 m v_0^2 < 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

という結果が得られ、衝突により並進の運動エネルギーは失われることを意味する。
 (備考) 失われたエネルギー (の大きさ) $|\Delta K|$ は粒子 2 と 3 の間のバネの振動エネルギー (= 運動エネルギー + 弾性によるポテンシャルエネルギー) に転化したことになる。