

1 1次元における2粒子系の力学

1.1 1次元における2粒子系の運動方程式と運動量保存則

1次元 (x 軸方向) における2粒子の運動を考える。

ここで次のような注意をしておく: 1次元系においても、速度、加速度や力は本来はベクトルであるから、それぞれ添え字 x をつけて、 x 成分であることを明示するべきであるが、表現が煩雑になるので、以下の説明においては、添え字 x を省略する。これらの物理量のベクトルとして性質のうち、向きはそれらの値の符号の正負として指定できる。すなわち、これらの物理量が正符号を持つ値の場合には x 軸の正の向きを意味し、負符号をもつ値の場合には x 軸の負の向きを意味する、と見なせばよい。

ある時刻 t において、それぞれ質量 m_1, m_2 , 速度 v_1, v_2 をもつ2粒子に 外力 (external forces) $F_1^{(e)}, F_2^{(e)}$ が働き、内力 (相互作用力, interaction) が粒子2から1へ (F_{12}) , 粒子1から2へ (F_{21}) 働いているとき、それぞれの粒子の運動方程式はつぎのようになる。

$$\frac{d(m_1 v_1)}{dt} = F_1^{(e)} + F_{12} \quad (1.1)$$

$$\frac{d(m_2 v_2)}{dt} = F_2^{(e)} + F_{21}. \quad (1.2)$$

(ニュートンは質量が変化する場合も含めて、運動量の時間変化率が力に等しいという形の運動方程式が成立すると主張していた。) 外力の例としては、重力または電気力または接触面における摩擦力などが考えられる。内力 (相互作用力) には運動の第三法則より、

$$F_{12} = -F_{21} \quad (1.3)$$

が成立する。しかし、粒子1に働く内力と外力の合力と、粒子2に働く内力と外力の合力との間には作用反作用の法則は成り立たない、すなわち、一般には

$$(F_1^{(e)} + F_{12}) \neq -(F_2^{(e)} + F_{21}) \quad (1.4)$$

であることを注意する。

式 (1.1) と (1.2) を辺々加えて、式 (1.3) を用いると

$$\frac{d(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{dt} = F_1^{(e)} + F_2^{(e)} \quad (1.5)$$

となる。ここで、内力は相殺することに注意する。

特に、外力が働かない場合 (孤立系)、($F_1^{(e)} + F_2^{(e)} = 0$) を考えると

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{constant}. \quad (1.6)$$

すなわち、外力が働かない場合、全運動量は保存される。運動量保存則が近似的に成立する条件を検討してみる。そのために、2粒子系における運動量変化と力積の関係を導いておく。

$$[m_1 v_1(t_2) + m_2 v_2(t_2)] - [m_1 v_1(t_1) + m_2 v_2(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} [F_1^{(e)}(t) + F_2^{(e)}(t)] dt. \quad (1.7)$$

ここで、時間 $\Delta t (= t_2 - t_1)$ の間、外力が働いても有限の大きさであれば、 Δt が短くなる極限において外力による力積が無視できる場合には近似的に運動量が保存される。

$$[m_1 v_1(t_2) + m_2 v_2(t_2)] - [m_1 v_1(t_1) + m_2 v_2(t_1)] \approx 0. \quad (1.8)$$

1.2 1次元における2粒子の衝突（直衝突）

1次元（ x 軸方向）における2粒子の運動を考える。ある時刻 t において、それぞれ質量 m_1, m_2 、速度 v_1, v_2 をもつ2粒子が衝突して、質量はそれぞれ保存したまま、速度が v'_1, v'_2 になったとする。ここで、衝突の際の撃力は十分大きくて、外力は無視できるとする。このとき、式（1.6）のように、2粒子系の全運動量は保存されるので

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1.9)$$

が成り立つ。

しかし、2粒子系の全運動エネルギーについては保存される場合もあるが、保存されない場合もある。

そこで、他のエネルギー形態に転換されるエネルギーを ε と表わし、種々のエネルギーの総和が保存されると考えると

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2 + \varepsilon \quad (1.10)$$

が成り立つ。（厳密に言えば、粒子の力学（質点力学）においては、現実の物体のもっとも単純なモデルとしての粒子（質点）の定義から、その内部構造を考慮しないので、これ以上の議論を進めることはできないが、多くの現象の理解において、以下の近似的な議論は有用であると思われる。）

1. 弾性衝突の場合:

全運動エネルギーが保存される衝突を弾性衝突と呼ぶ。

このとき、

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2 \quad (1.11)$$

が成り立つ。そこで、式（1.9）と式（1.11）を連立されて、衝突後の速度 v'_1, v'_2 を求める。式（1.9）より

$$m_1 (v_1 - v'_1) = m_2 (v'_2 - v_2) \quad (1.12)$$

が得られる。同様に、式 (1.11) より

$$m_1(v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2) \quad (1.13)$$

が得られる。

式 (1.13) の辺々には式 (1.12) の辺々が含まれるので、式 (1.13) の辺々を式 (1.12) の辺々で割ればよいと考えるかもしれない。しかし、分母になる式 (1.12) がゼロになる場合を吟味しておく必要がある。式 (1.12) がゼロになる場合には、 $v_1 = v'_1$ かつ $v'_2 = v_2$ になる、すなわち衝突前の自明な解である。したがって、次に式 (1.12) がゼロにならない場合を考える。式 (1.13) の辺々を式 (1.12) の辺々で割ると、

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \quad (1.14)$$

が得られる。式 (1.9) と (1.14) を連立させて解くと、

$$v'_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_2, \quad (1.15)$$

$$v'_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_2 \quad (1.16)$$

が得られる。ここで、式 (1.15) の粒子についての添え字 1 と 2 を入れ替えても、式 (1.16) が得られることに注意する。その理由は式 (1.9) と (1.14) の内容は粒子の添え字を入れ替えても変わらないからである。

さらに、現象としてしばしば現れる 2 つの場合をより具体的に考察する。

(a) 2 粒子の質量は (近似的に) 等しい ($m_1 = m_2$) とし、式 (1.15) と式 (1.16) より、

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1 \quad (1.17)$$

となる、すなわち、質量が等しい 2 粒子間の弾性衝突においては、粒子の速度が入れ替わる。これは、原子炉中の中性子の減速のように、減速を目的とする場合に活用されることがある。

(b) 粒子 1 の質量に比べて、粒子 2 の質量が十分大きければ、質量比 m_1/m_2 を 1 に比べて無視すると、

$$v'_1 \approx -v_1 + 2v_2, \quad (1.18)$$

$$v'_2 \approx v_2 \quad (1.19)$$

となる。すなわち、質量の軽い粒子はほぼ同じ速度で逆向きに跳ね返ることになる。

(参考：現実の物体は原子分子の多数からなる複合粒子であり、原理的には内部運動が可能で、それに衝突前の運動エネルギーが転換されるが、適当な仕組みで内部運動は抑制される場合に弾性衝突となる。たとえば、中性子も陽子も素粒子ではなく、クォークと呼ばれる粒子 3 個からなる複合粒子であるが、内部励起エネルギーが非常に大きいため、低エネルギーにおいては内部励起を無視できることを意味する。)

2. 完全非弾性衝突の場合:

衝突後に2粒子が合体して同じ速度で運動する ($v'_1 = v'_2 \equiv v'$) 場合を完全非弾性衝突という。この場合、運動量保存則は

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' \quad (1.20)$$

$$\rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1.21)$$

となる。さらに、式 (1.10) は

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v')^2 + \varepsilon \quad (1.22)$$

となる。式 (1.21) を式 (1.20) に代入すると、衝突により他のエネルギー形態に転換されるエネルギーの大きさ ε は

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2 \quad (\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}) \quad (1.23)$$

となる。(参考：これは粒子間の相対運動エネルギーである。) 実は合体した2粒子系の温度は上昇する。これは2粒子系の内部エネルギーの増加を意味するからである。

1.3 2粒子系の重心および相対運動 (1次元)

2粒子の x 座標をそれぞれ、 x_1, x_2 とする。この2粒子系の重心座標 X と相対座標 x をそれぞれ次のように定義する。重心 (center of gravity) を質量中心 (center of mass) ともいう。

$$X \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \quad (1.24)$$

$$M \equiv m_1 + m_2 \quad (2 \text{ 粒子系の全質量}), \quad (1.25)$$

$$x \equiv x_1 - x_2, \quad (1.26)$$

$$x_1 = X + \frac{m_2}{M} x, \quad x_2 = X - \frac{m_1}{M} x. \quad (1.27)$$

対応する速度、加速度 (の x 成分) をそれぞれ定義する。

$$V \equiv \frac{dX}{dt} (= \dot{X}), \quad A_x \equiv \frac{dV}{dt} (= \dot{V}) = \frac{d^2 X}{dt^2} (= \ddot{X}) \quad (1.28)$$

$$v \equiv v_1 - v_2 (= \dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad a \equiv a_1 - a_2 (= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2). \quad (1.29)$$

式 (1.1) と (1.2) を辺々加えて、式 (1.3) を用いると

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = F_1^{(e)} + F_2^{(e)} \quad (\text{重心の運動方程式}) \quad (1.30)$$

が得られる。また、式 (1.1) を質量 m_1 で割り、式 (1.2) を質量 m_2 で割り、辺々引いて式 (1.3) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{12} + \frac{1}{m_1} F_1^{(e)} - \frac{1}{m_2} F_2^{(e)} \\ \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{12} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \left(\frac{m_2}{M} F_1^{(e)} - \frac{m_1}{M} F_2^{(e)} \right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

が得られる。ここで換算質量 (reduced mass), μ をつぎのように

$$\frac{1}{\mu} \equiv \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (1.32)$$

$$\rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (1.33)$$

定義すると

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_{12} + \frac{\mu}{m_1} F_1^{(e)} - \frac{\mu}{m_2} F_2^{(e)} \\ &= F_{12} + \left(\frac{m_2}{M} F_1^{(e)} - \frac{m_1}{M} F_2^{(e)} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

が得られる。ここで、式 (1.30) は、2 粒子系の重心の運動はあたかも全質量 M が重心に集中し、それに外力 $F_1^{(e)} + F_2^{(e)}$ が働いているように振舞うことを示している。

さらに、外力がない（力学的な孤立系）場合、

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad (1.35)$$

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{12} \quad (1.36)$$

となり、後者 (1.36) , 相対運動の方程式が得られる。

一般に、2 粒子系の運動に関する物理量を重心運動と相対運動に分離できる場合があることは、それぞれの運動があたかも 1 粒子運動のように扱えるので、非常に有効な手段となる。ただ、相対運動に関しては換算質量を用いなければならないことに注意すべきである。（また、後述のように、運動エネルギー（と、2, 3 次元における角運動量）の重心運動部分と相対運動部分は分離できるが、ポテンシャル・エネルギーについてはかならずしも分離できるとは限らない。）

外力が働かない場合の重心運動方程式 (1.35) から重要な一般的な結果が得られる。すなわち、

$$P \equiv M \dot{X} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{constant} \quad (1.37)$$

となり、外力が働かない場合には、2 粒子系の全運動量が保存される。

もちろん、この結果は前述した運動量保存則と同じであるが、全質量が通常保存されるので、外力が働かない場合、重心の速度の x 成分が保存されること を意味する。

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \text{constant}. \quad (1.38)$$

（外力が働かない場合に、）さらに、重心が初め静止していれば、重心の x 座標も保存される になる。

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} = \text{constant}. \quad (1.39)$$

換算質量の意味を理解しやすくするために典型的な事例を与える。

$$m_1 = m_2 \text{ のとき, } \mu = \frac{1}{2} m_1; \quad m_1 \ll m_2 \text{ のとき, } \mu \approx m_1, \quad (1.40)$$

$$\text{月 } (7.35 \times 10^{22} \text{ kg}) \cdot \text{地球 } (5.97 \times 10^{24} \text{ kg}) \text{ 系; } \mu \approx 6.54 \times 10^{22} \text{ kg}, \quad (1.41)$$

$$\text{電子 } (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot \text{陽子 } (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}) \text{ 系; } \mu \approx 9.104 \times 10^{-31} \text{ kg}. \quad (1.42)$$

換算質量 μ の代わりにより軽い質量 (m_1 とする) を用いる場合の誤差の度合いは 1 に対して次の程度の量

$$\frac{m_1}{\mu} = \frac{m_1}{m_2} \quad (1.43)$$

を無視すること意味する。

1.4 2 粒子系における仕事とエネルギー (1 次元)

2 粒子の座標 x_1, x_2 を重心座標 X と相対座標 x で表した式 (1.27) の時間微分を用いれば、次のように、2 粒子系の運動エネルギー K も重心運動の部分と相対運動の部分に分離されることがわかる。

$$\begin{aligned} K &\equiv \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{X} + \frac{m_2}{M}\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{X} - \frac{m_1}{M}\dot{x})^2 \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

ポテンシャルの場合は重心運動と相対運動に分離できる場合とできない場合がある。

1. 鉛直方向に強さ k のバネで結ばれた 2 粒子のポテンシャル・エネルギー $U(x_1, x_2)$ は重力によるポテンシャルとバネの弾性によるポテンシャルからなる。重力加速度の大きさを g として、円鉛直上向きに x 軸を選べば

$$U(x_1, x_2) = m_1gx_1 + m_2gx_2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \quad (1.45)$$

$$= MgX + \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.46)$$

となり、重心運動部分と相対運動部分に分離される。

2. 2 粒子が同じ角振動数 ω をもつ単振動型ポテンシャルの下にある場合には、ポテンシャル・エネルギーの和 U は

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}m_1\omega^2x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\omega^2[X + \frac{m_2x}{M}]^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2[X - \frac{m_1x}{M}]^2 \\ &= \frac{1}{2}M\omega^2X^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 \end{aligned} \quad (1.47)$$

のように、重心運動部分と相対運動部分に分離される。相互作用のポテンシャルは相対座標のみに依存することが多いので、問題はない。しかし、外力の場合、粒子 1 に対する外力が保存力であり、そのポテンシャルが粒子 1 の x 座標の関数 $U_1(x_1)$ として与えられても、単振動型ではない場合、式 (1.27) により、 $U_1(X + m_2x/M)$ となり、一般には重心、相対運動は分離されないことに注意する。

2 2粒子系の力学 (2,3次元)

2.1 2粒子系の運動方程式と運動量保存則 (2,3次元)

2,3次元における2粒子の運動を考える。ある時刻 t において、それぞれ質量 m_1, m_2 , 速度 (ベクトル) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ をもつ2粒子に外力 (external forces) $\mathbf{F}_1^{(e)}, \mathbf{F}_2^{(e)}$ (ベクトル) が働き、内力 (相互作用力) が粒子2から1へ ($\mathbf{F}_{12}$), 粒子1から2へ ($\mathbf{F}_{21}$) (ベクトル) が働いているとき、それぞれの粒子の運動方程式 (ベクトル形) は次のようになる。

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_{12}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = \mathbf{F}_2^{(e)} + \mathbf{F}_{21}. \quad (2.2)$$

(質量が変化する場合も含めて、運動量の時間変化率が力に等しいという形の運動方程式が成立する。) 内力 (相互作用力) には運動の第三法則が成立するから、

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.3)$$

式 (2.1) と (2.2) を辺々加えて、式 (2.3) を用いると

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)}. \quad (2.4)$$

内力は相殺することに注意する。

ここで、どのような場合に2粒子系の運動量が保存するかを調べる。

1. 外力が働かない場合 (孤立系)、($\mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)} = \mathbf{0}$ または $\mathbf{F}_1^{(e)} = \mathbf{F}_2^{(e)} = \mathbf{0}$)

この場合には

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{constant}. \quad (2.5)$$

すなわち、孤立系においては運動量のベクトル和が保存される。すなわち、任意の座標表示において、そのすべての成分ごとに独立に成立する。例えば、直交直線座標を選択する場合、 x, y, z 成分で表示すると

$$m_1v_{x1} + m_2v_{x2} = \text{constant}(x), \quad (2.6)$$

$$m_1v_{y1} + m_2v_{y2} = \text{constant}(y), \quad (2.7)$$

$$m_1v_{z1} + m_2v_{z2} = \text{constant}(z). \quad (2.8)$$

孤立系においては運動量のベクトル和の各成分がそれぞれの値に保存される。

2. 特定の方向 (x 軸方向とする) にだけ外力が働かない場合。

このとき

$$F_{x1}^{(e)} + F_{x2}^{(e)} = 0, \text{ または } F_{x1}^{(e)} = F_{x2}^{(e)} = 0 \quad (2.9)$$

であるから

$$m_1v_{x1} + m_2v_{x2} = \text{constant} \quad (2.10)$$

となり、運動量の和ベクトルの外力が働かない方向の成分は保存される。しかし、他の成分については

$$\frac{d(m_1 v_{y1} + m_2 v_{y2})}{dt} = F_{y1}^{(e)} + F_{y2}^{(e)}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d(m_1 v_{z1} + m_2 v_{z2})}{dt} = F_{z1}^{(e)} + F_{z2}^{(e)} \quad (2.12)$$

となり、対応する運動量の和は保存されない。このような特定の方向にだけ外力が働かない事例としては、重力は働いているが、抵抗や摩擦力のない場所における2粒子系の運動が考えられる。この場合には水平方向の運動量の和は保存されるが、鉛直方向の運動量の和は保存されない。