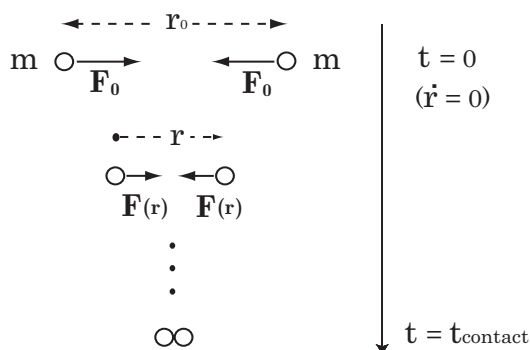


○2つの物体がある距離を離れて、万有引力(重力)のみで接触するまでの時間の計算。



換算質量 μ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &\equiv \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \\ \rightarrow \mu &= \frac{m}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

相対運動の(動径方向の)運動方程式より

$$\begin{aligned} \mu \cdot \ddot{r} &= -G \frac{m \cdot m}{r^2} \quad (2) \\ r &= r(t), \quad (G: \text{重力定数}) \end{aligned}$$

式(2)と式(1)より $\dot{r}$ を両辺にかけて

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{2} \dot{r} \cdot \ddot{r} &= -\frac{Gm}{r^2} \dot{r} \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{4} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{Gm}{r} \right) \\ \rightarrow \frac{\dot{r}^2}{4} &= \frac{Gm}{r} + \text{constant.} \end{aligned}$$

$t=0$ で $\dot{r}=0, r=r_0$ を用いて

$$\frac{\dot{r}^2}{4} = Gm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (3)$$

力学的エネルギー保存則より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + (-)G \frac{m \cdot m}{r} &= -G \frac{m \cdot m}{r_0} \\ \rightarrow \frac{1}{4} \dot{r}^2 - G \frac{m}{r} &= -G \frac{m}{r_0} \\ \rightarrow \frac{\dot{r}^2}{4} &= Gm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)または式(4)より

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{4Gm} \frac{(r \cdot \dot{r})^2}{r_0} &= \left[\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \\ &= (-) \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{4} \\ \therefore \left[\frac{r \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}} \right]^2 + \left[2 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

(5) の一般解は次のように表すことができる

$$\frac{r \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}} = \pm \sin(\theta + \alpha), \quad (6)$$

$$2 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} \right) = \pm \cos(\theta + \alpha). \quad (7)$$

ただし, α : 定数, $\theta \equiv \theta(t)$.

初期条件では ($t = 0$ で $r = r_0 > 0, \dot{r} = 0$) を考慮すると $t = 0$ で $\theta = 0$ として、式 (7) より

$$2 \left(\frac{r_0}{r_0} - \frac{1}{2} \right) = \pm \cos \alpha \implies \alpha = 0, \text{ cos の符号は上符号を採用する.}$$

今の場合、 $r > 0, \dot{r} < 0$ であると考えてよいから式 (6) の符号はマイナス符号を採用する

$$\therefore \frac{r \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}} = -\sin \theta, \quad (8) \quad r(t), \quad \dot{r}(t) \Rightarrow \theta(t)$$

$$\therefore 2 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} \right) = \pm \cos \theta, \quad (9) \quad \longrightarrow \quad r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos \theta). \quad (10)$$

接触するときは $r = 0$ 、式 (8) より $\theta = \pi$ となる。

$\theta = 0$ から $\theta = \pi$ までの経過時間を $t = t_{\text{contact}}$ とすると

$$\begin{aligned} t_{\text{contact}} &\equiv \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} dt \quad (\theta = \theta(t) \rightarrow t = t(\theta)) \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{dt}{d\theta} \right) d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、式 (10) を微分して、式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r_0}{2}(-1)\dot{\theta} \sin \theta = \frac{r_0}{2} \times \dot{\theta} \times \frac{r \dot{r}}{\sqrt{Gmr_0}}, \\ \rightarrow \quad \dot{\theta} &= \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Gm}{r_0}}, \\ \rightarrow \quad \left(\frac{dt}{d\theta} \right) &= \frac{1}{\dot{\theta}} = \frac{\frac{r_0}{2}(1 + \cos \theta)\sqrt{r_0}}{2\sqrt{Gm}}. \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) を式 (11) に代入

$$\begin{aligned} t_{\text{contact}} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1 + \cos \theta) d\theta, \\ \therefore t_{\text{contact}} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{r_0^3}{Gm}} \pi. \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$r_0 = 1\text{m} , m = 100\text{kg} , G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2),$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} t_{\text{contact}} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(1\text{m})^3}{6.672 \times 10^{-11} \times \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times 100\text{kg}}} \times 3.14 \\ &= \frac{3.14}{4} \times \sqrt{\frac{10^8}{0.6672}} \text{ s} \\ &= \frac{3.14 \times 10^4}{4 \times \sqrt{0.6672}} \text{ sec} \\ &\simeq 9610 \text{ sec} \simeq 160 \text{ min} = 2 \text{ hours } 40 \text{ min.} \end{aligned}$$

(参考) 自己重力系としての宇宙の崩壊時間

宇宙全体の質量を M 、初速度ゼロで、半径 r_0 の大きさの球として、重力崩壊するまでの時間を t_{kelvin} とすると

$$\begin{aligned} t_{\text{kelvin}} &= \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} \leftarrow \frac{1}{2} r^2 = G M \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}, \quad \rho_0 \equiv \frac{M}{\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3\right)} : \text{平均密度} \end{aligned}$$

従って、最初の大きさに依らず、平均密度 ρ_0 ($1/\sqrt{\rho_0}$ に比例) に依存する。

$$\begin{aligned} (\text{隣接する恒星までの平均間隔}) &\simeq 5 \times 10^5 \text{ AU} \\ &= 5 \times 10^5 \times (1.50 \times 10^{11} \text{ m}) \\ &= 7.5 \times 10^{16} \text{ m} \implies r_0 \text{ とする,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \quad (M_0 : \text{太陽の質量}) \\ &\simeq \frac{3 \times 2 \times 10^{30} \text{ kg}}{4\pi \times (7.5 \times 10^{16} \text{ m})^3} \simeq 1.1 \times 10^{-21} \text{ kg/m}^3 (\simeq 1.1 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow t_{\text{kelvin}} &= \sqrt{\frac{3 \times 3.14}{32 \times 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{s}^{-2} \times 1.1 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3 \times 3.14}{32 \times 6.672 \times 1.1} \right) \times 10^{32}} \text{ sec} \\ &\simeq (0.200) \times 10^{16} \text{ sec} \simeq \frac{0.200}{0.315} \times 10^8 \text{ year} \quad (1\text{year} = 365\text{day} = 0.315 \times 10^8 \text{s}) \\ &= 0.635 \times 10^8 \text{ year} \implies 6350 \text{ 万年.} \end{aligned}$$