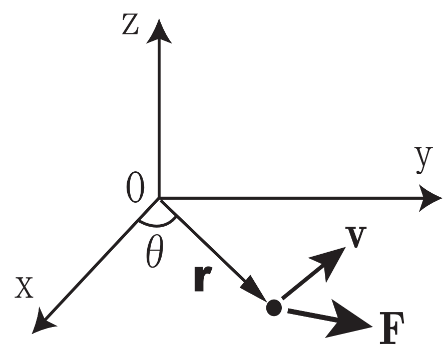
粒子（質量 m）の運動と働く力が xy 面上に限られる場合に、次の問いに答えよ。

1. 平面座標 (r, θ) を用いて、この粒子の角運動量の z 成分 ℓ_z を計算せよ。
2. 力のモーメント（またはトルク）の z 成分 N_z の大きさは力の大きさ F と、原点から力のベクトルへおろした垂線の長さ p の積になることを示せ。

(解答例) 1. この粒子の x, y 座標は



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta, y = r\sin\theta, (r(t), \theta(t)), \\
\rightarrow v_x &= \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \\
v_y &= \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

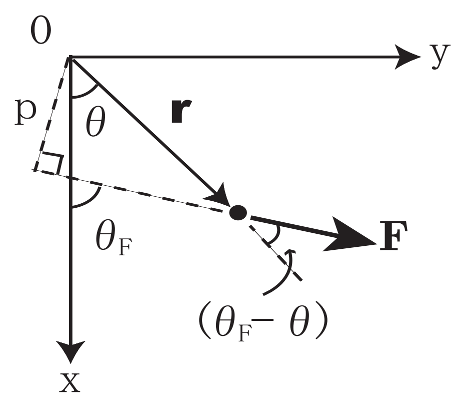
角運動量 (ベクトル) の定義より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell} &\equiv \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \\
&= (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\times m(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) \\
&= m(yv_z - zv_y)\boldsymbol{i} + m(zv_x - xv_z)\boldsymbol{j} + m(xv_y - yv_x)\boldsymbol{k} \\
&= \ell_x\boldsymbol{i} + \ell_y\boldsymbol{j} + \ell_z\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

今、$z = 0, v_z = 0$ より ℓ_x, ℓ_y=0 である。また角運動量の z 成分 ℓ_z は

$$
\begin{aligned}
\ell_z &= xmv_y - ymv_x \\
&= r\cos\theta\cdot m(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) \\
&\quad -r\sin\theta\cdot m(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta), \\
\therefore\ \ell_z &= mr^2\dot{\theta}.
\end{aligned}
$$

2. 力のモーメント (ベクトル) の定義より



$$\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}.$$

従って、z 成分 N_z は

$$N_z = xF_y - yF_x.$$

ここで力のベクトル F の x 軸となす角を θ_F とすると

$$
\begin{aligned}
N_z &= r\cos\theta\cdot(F\sin\theta_F) - r\sin\theta\cdot(F\cos\theta_F) \\
&= F\cdot r\sin(\theta_F - \theta) \\
&= F\cdot p \quad (p \equiv r\sin(\theta_F - \theta))
\end{aligned}
$$

従って、N_z は力の大きさ F と、原点 O から力ベクトル F(の作用線) に下ろした垂線の長さ p の積になる。