

### (原子核の中に電子は束縛できるか)

原子核の中に電子を閉じこめることができるか、次の手順でこの問に答えよ。ただし、プランク定数  $h$  により  $\hbar \equiv h/2\pi = 1.0545726 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s}$  を定義する。  $1/(4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{coul}^{-2})$ ,  $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{joule}$ ,  $1\text{MeV} = 10^6 \text{eV}$  である。真空の誘電率としては  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{coul}^2$ 、光速は  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$  を用いよ。

1. 原子核の位置エネルギーが幅  $10^{-14} \text{m}$  で無限に深い1次元の矩形の井戸で表わされるとして、原子核に束縛されると仮定された場合の電子の最小の運動エネルギーを MeV 単位で計算せよ。
2. 原子核の表面での電子のおおまかなクーロン・ポテンシャルを MeV 単位で計算し、無限遠方における位置エネルギーと比較せよ。ここで原子核の電荷は  $50e$  とせよ。
3. 以上で計算された位置エネルギーと運動エネルギーをもつ電子を束縛するのに十分であるか。

(電子は原子核に束縛されないが、原子核の中でつくれ、 $\beta$ 崩壊と呼ばれる過程で原子核から脱出する。)(解答例)

1. 無限に深い幅  $a$  の1次元の矩形の井戸の中では、シュレディンガー方程式を解くか、ド・ブローイ波の定常波条件 ( $n\lambda/2 = a$ , ( $n = 1, 2, \dots$ )) のいずれかを使うと波数  $k$  は次のように離散的な値しか許されなくなることがわかる。

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

ド・ブローイの関係より粒子の運動量は  $p_n = \hbar k_n = n\pi/a$  となり、その最低値は  $p = \hbar\pi/a$  となる。幅  $a = 10^{-14} \text{m}$  として運動エネルギーは相対論的に考えると次のように計算される。

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{(m_e c^2)^2 + (cp)^2} - m_e c^2 \\ &\approx cp \quad (m_e c^2 \approx 0.51 \text{MeV}) \\ &= (2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}) \times (1.0545726 \times 10^{-34} \text{joule} \cdot \text{s}) \times \frac{3.1415926}{10^{-14} \text{m}} \\ &= \frac{2.99792458 \times 3.1415926 \times 1.0545726}{1.60} \times 10^{8-34+14+19} \text{eV} \\ &= 62.076 \text{MeV}. \end{aligned} \quad (2)$$

2. 原子核の表面での電子のおおまかなクーロン・ポテンシャルの大きさは、幅  $a = 10^{-14} \text{m}$  の半分を半径  $r$  と考えて

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon r} &= 8.988 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{coul}^2 \times 50 \times (1.60 \times 10^{-19} \text{coul})^2 \frac{1}{2} \times 10^{-14} \text{m} \\ &= \frac{8.988 \times 50 \times 1.6^2 \times 2}{1.6} \times 10^{9-38+14+19} \text{eV} \\ &= 14.4 \text{MeV}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. 以上で計算された位置エネルギー  $-14.4 \text{MeV}$  は最低の運動エネルギー  $62.076 \text{MeV}$  をもつ電子を束縛するのに不十分である。