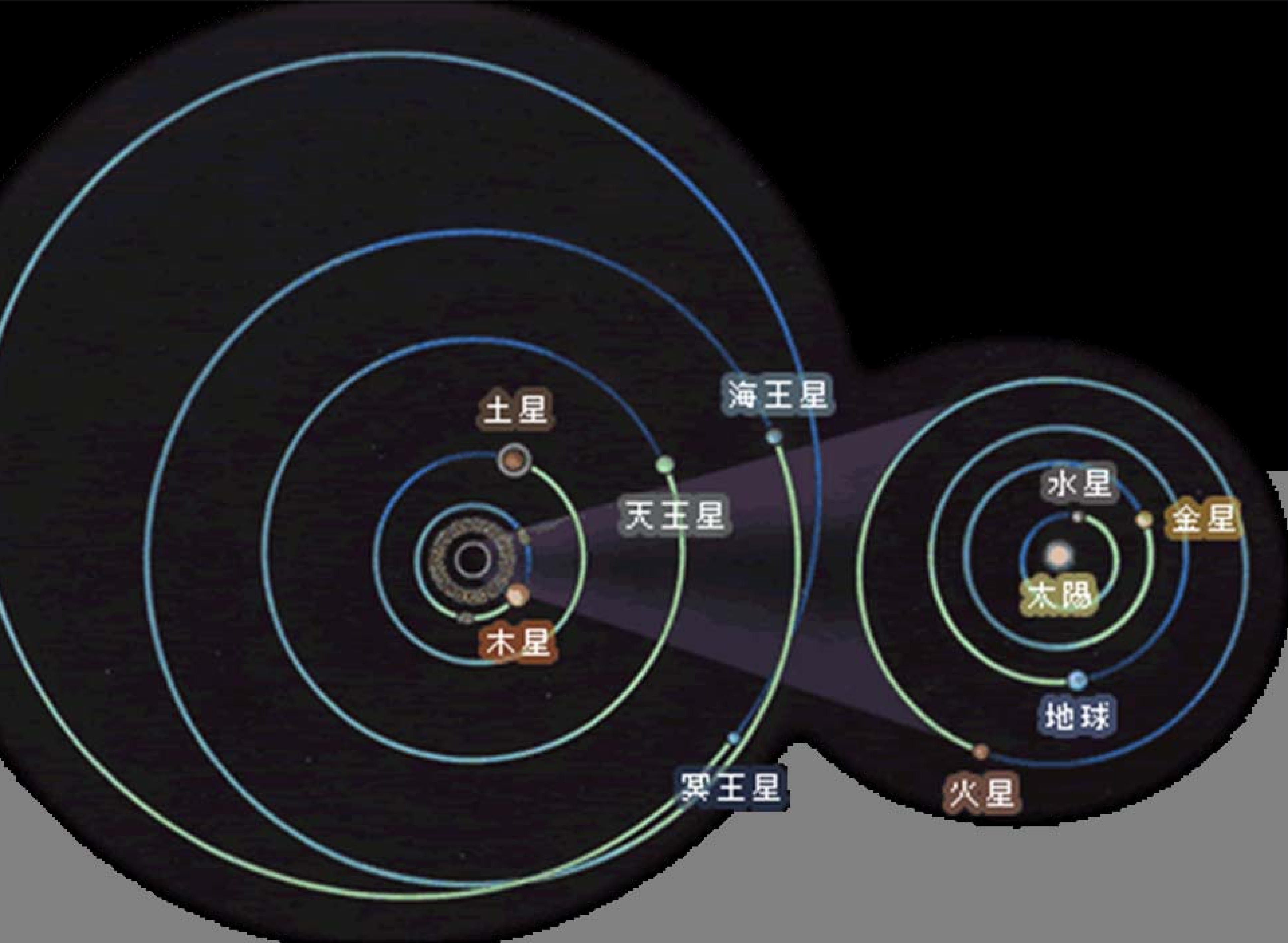
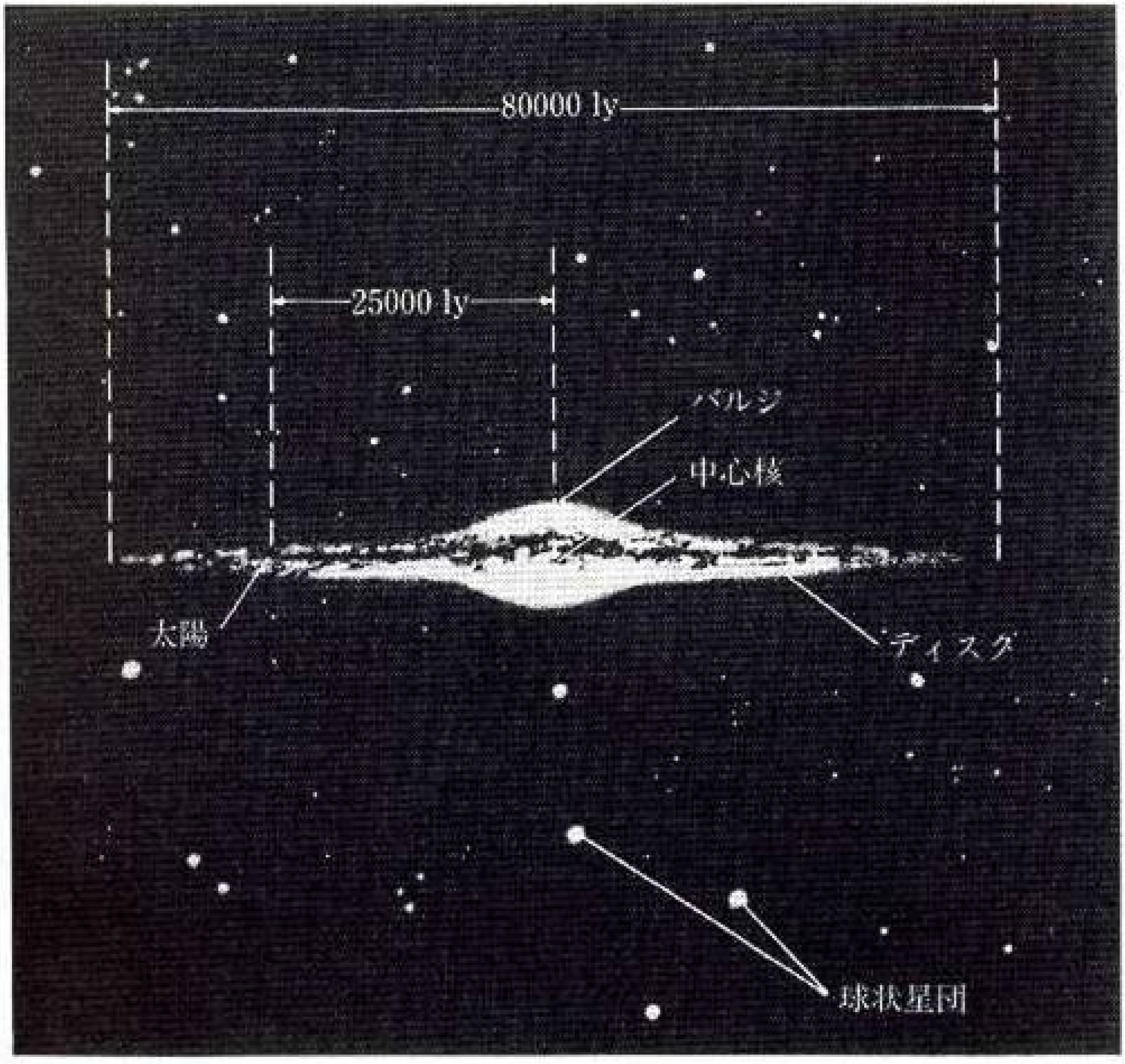
一般相対論的宇宙論

数理情報基礎講座　　鎌田裕之

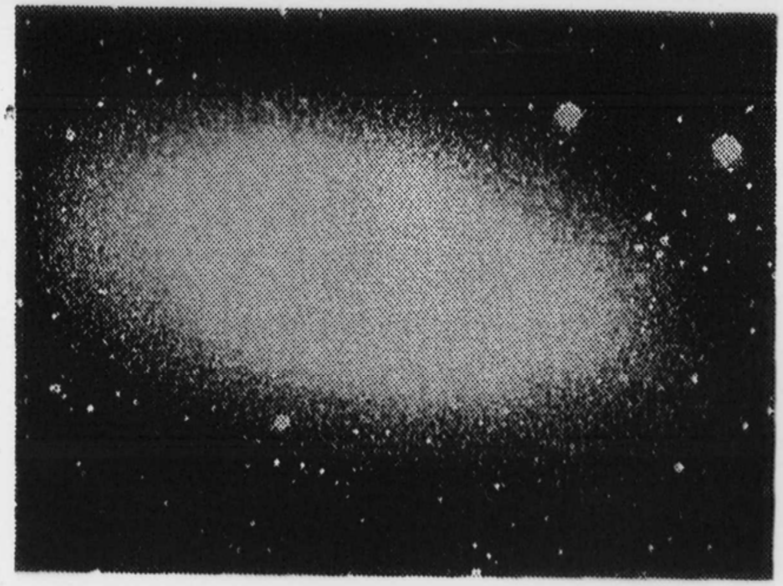

海王星
土星
天王星
木星
冥王星
水星
金星
太陽
地球
火星

太陽系の惑星

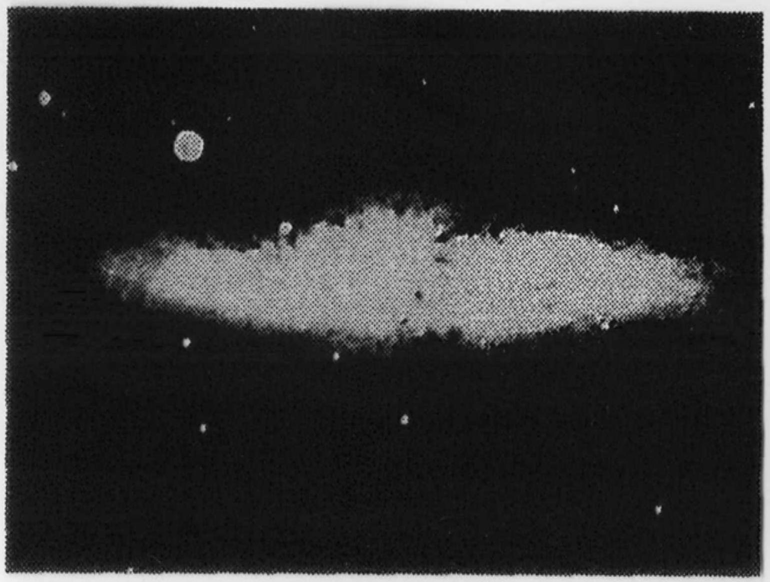
回転方向
ペルセウス座の腕
太陽
オリオン座の腕
白鳥座の腕
ケンタウルス座の腕
射手座の腕


80000 ly
25000 ly
バルジ
中心核
太陽
ディスク
球状星団

渦巻き銀河



楕円銀河



不規則銀河

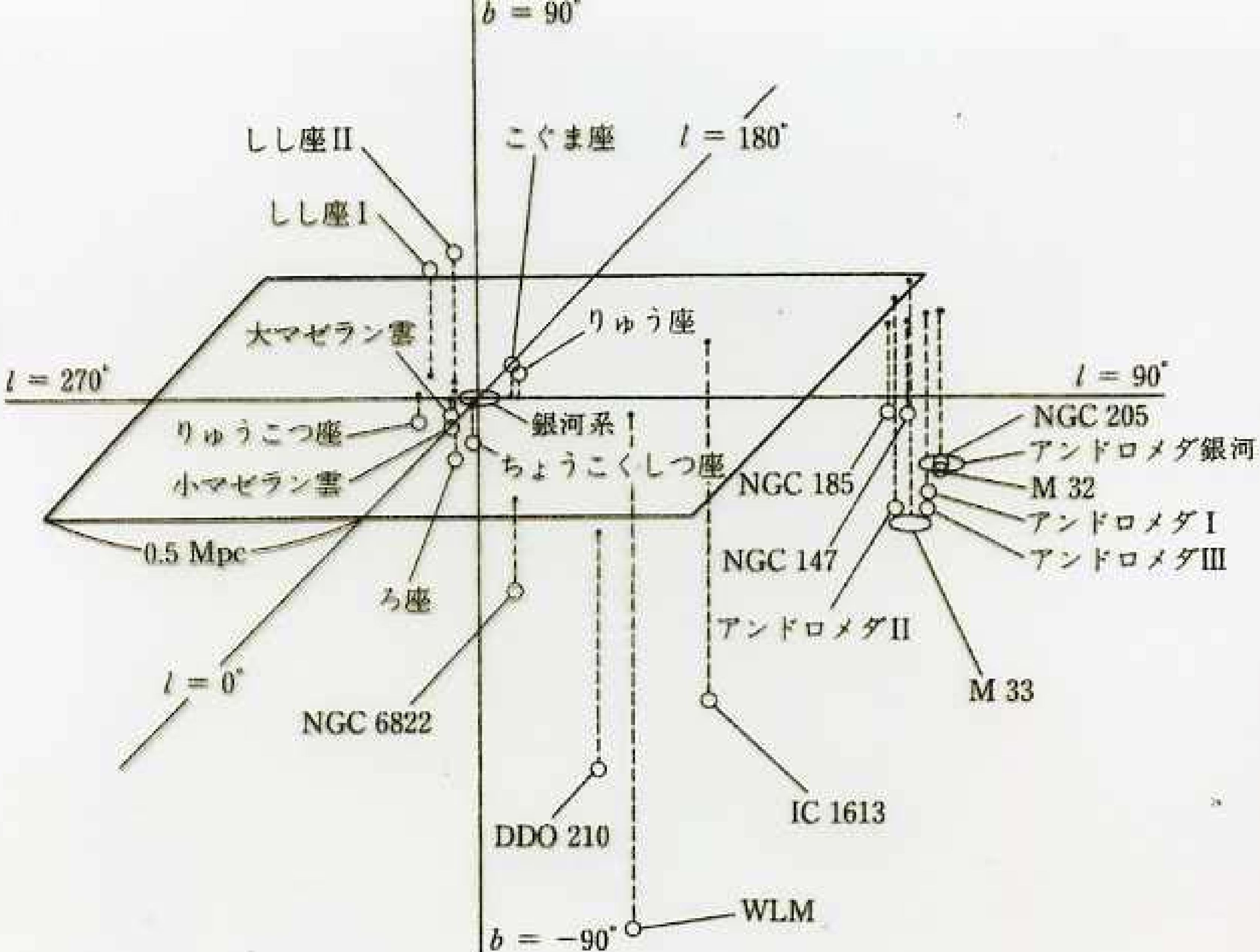


図1.8　局所銀河団
〔須藤靖，宇宙の大構造，p. 14，培風館(1992)〕

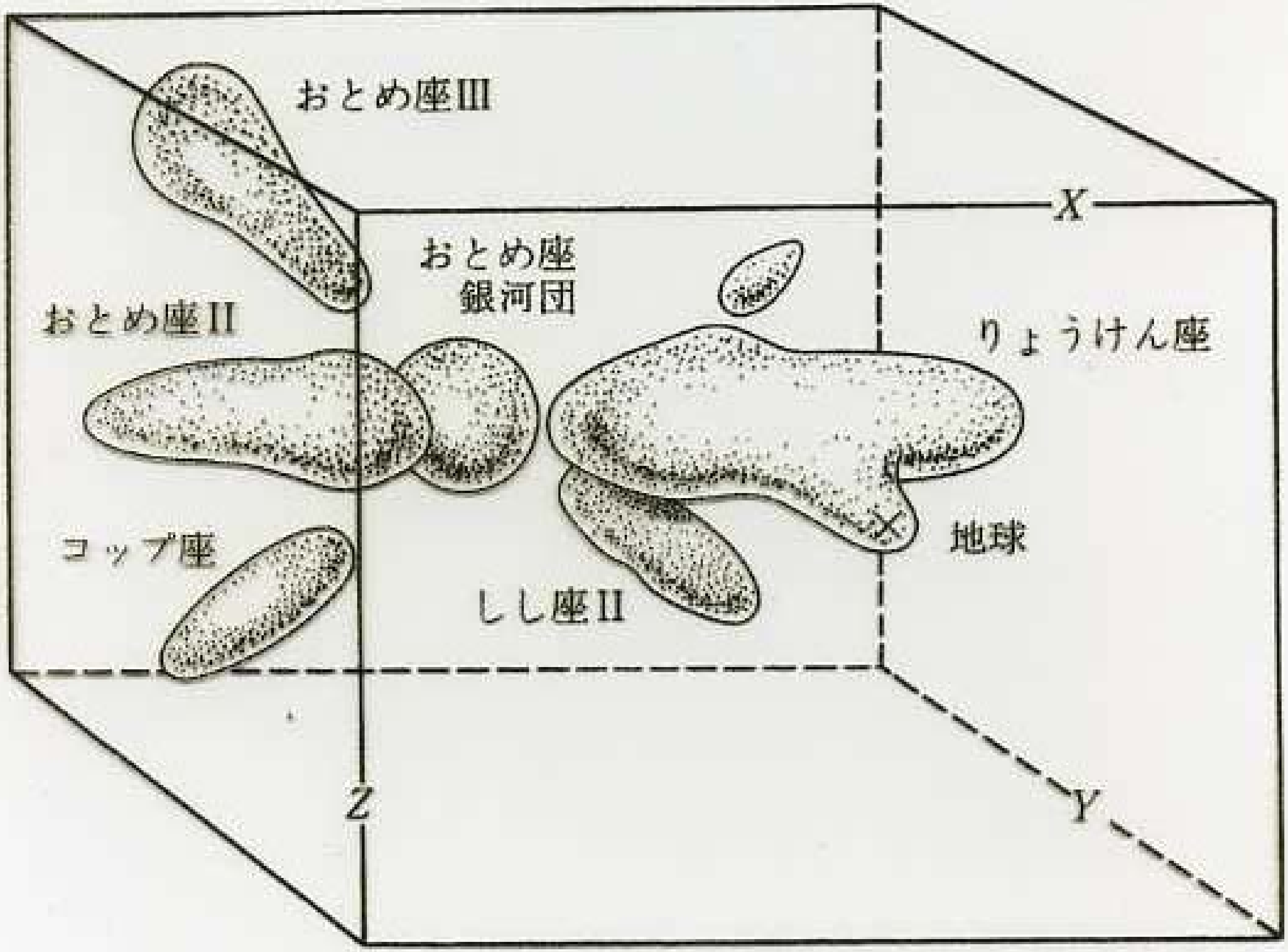


図1.9　超局所銀河団
〔Tully, R. B., *Sky & Telescope*, **63**, p. 554, Sky Publishing Corporation (1982)〕

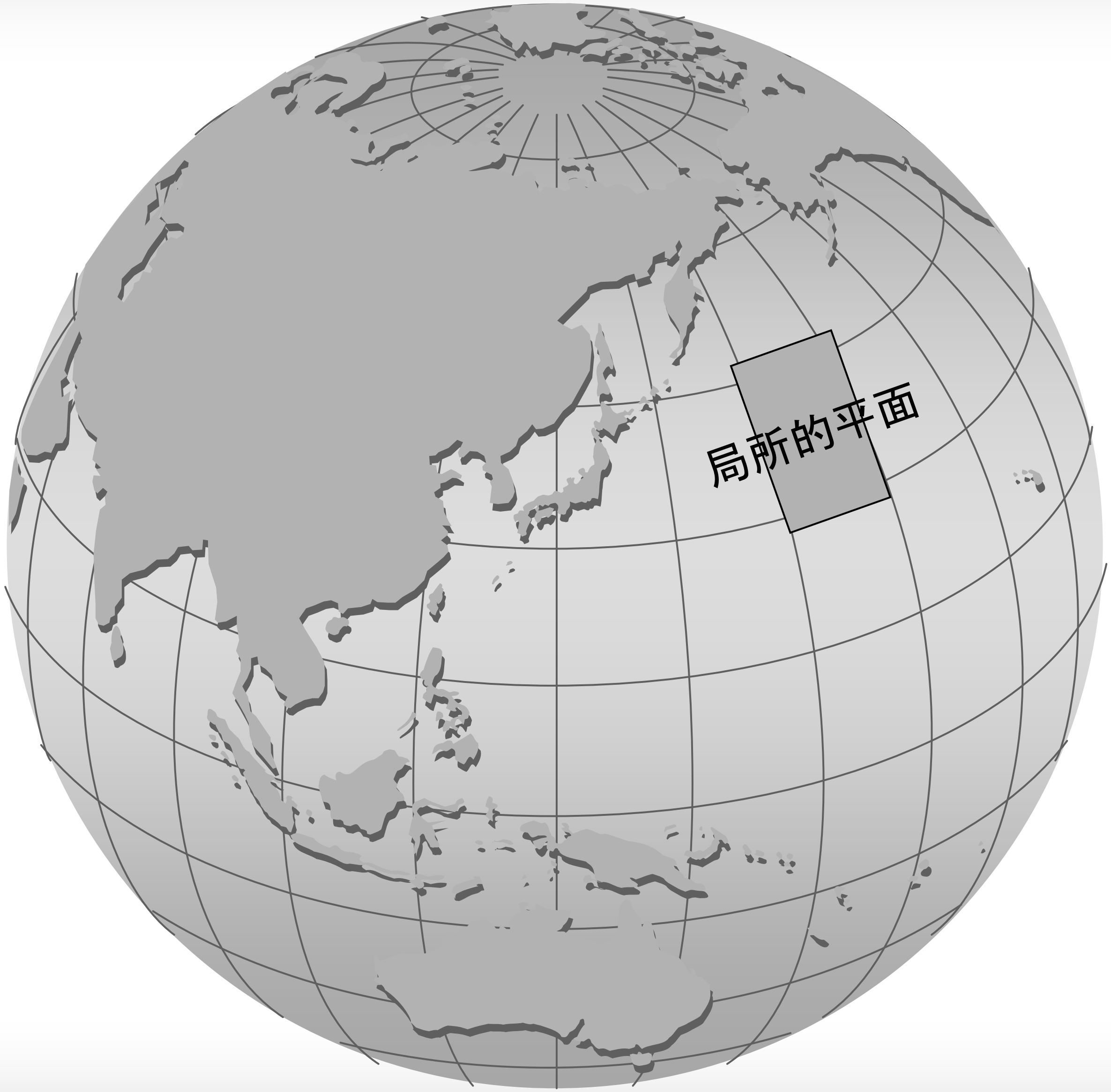
２次形式

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a\,xy + b\,yz + c\,zx$

どうしてピタゴラスの定理は、

a=b=c=0なのか！？

- 平らな空間（ユークリッド幾何学）→a=b=c=0
- 曲がった空間（リーマン幾何学）→a≠0, b≠0, c≠0


局所的平面

物質も電磁波もないところの重力方程式は、

$$R_{\mu\nu} = 0$$

となる。

時間に依存せず、座標原点に重心をもち、球対称な質量分布をしている場合、
シュヴァルツシルトの解がある。

シュヴァルツシルトの解

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

時間に依存せず、
座標原点に重心をもち、
球対称な質量分布をしている場合、
シュヴァルツシルトの解がある。

$$-c^2(d\tau)^2 = -(cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

$$= -\left(1-\frac{a}{r}\right)(cdt)^2 + \frac{1}{1-a/r}(dr)^2 + r^2\left\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right\}$$

$$g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

この場合、重力ポテンシャルΦは、 $\Phi = -\dfrac{GM}{r}$ と書ける。

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

この半径で、g_{11}が発散する。→特異点

r＝a:事象の地平線

$$a = \frac{2GM}{c^2}$$

Aより内部からでた光は、外にでられない。
太陽の場合：a=3km、地球の場合：a=9mm

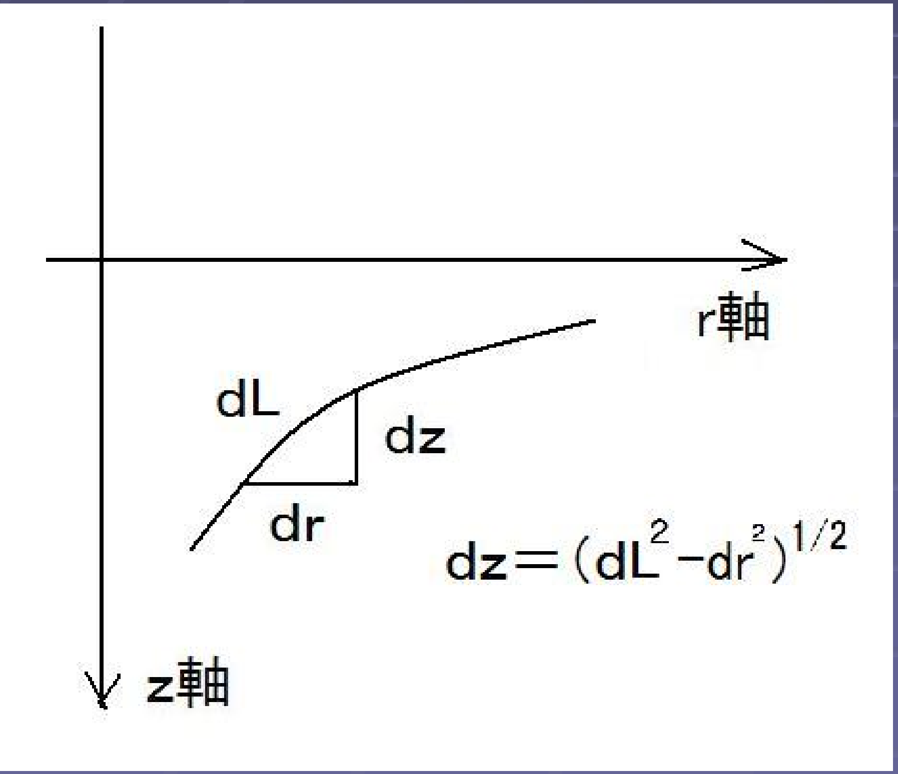
天体の半径がaよりも小さい場合

↓

ブラック・ホール化する

ブラックホールを描いてみよう

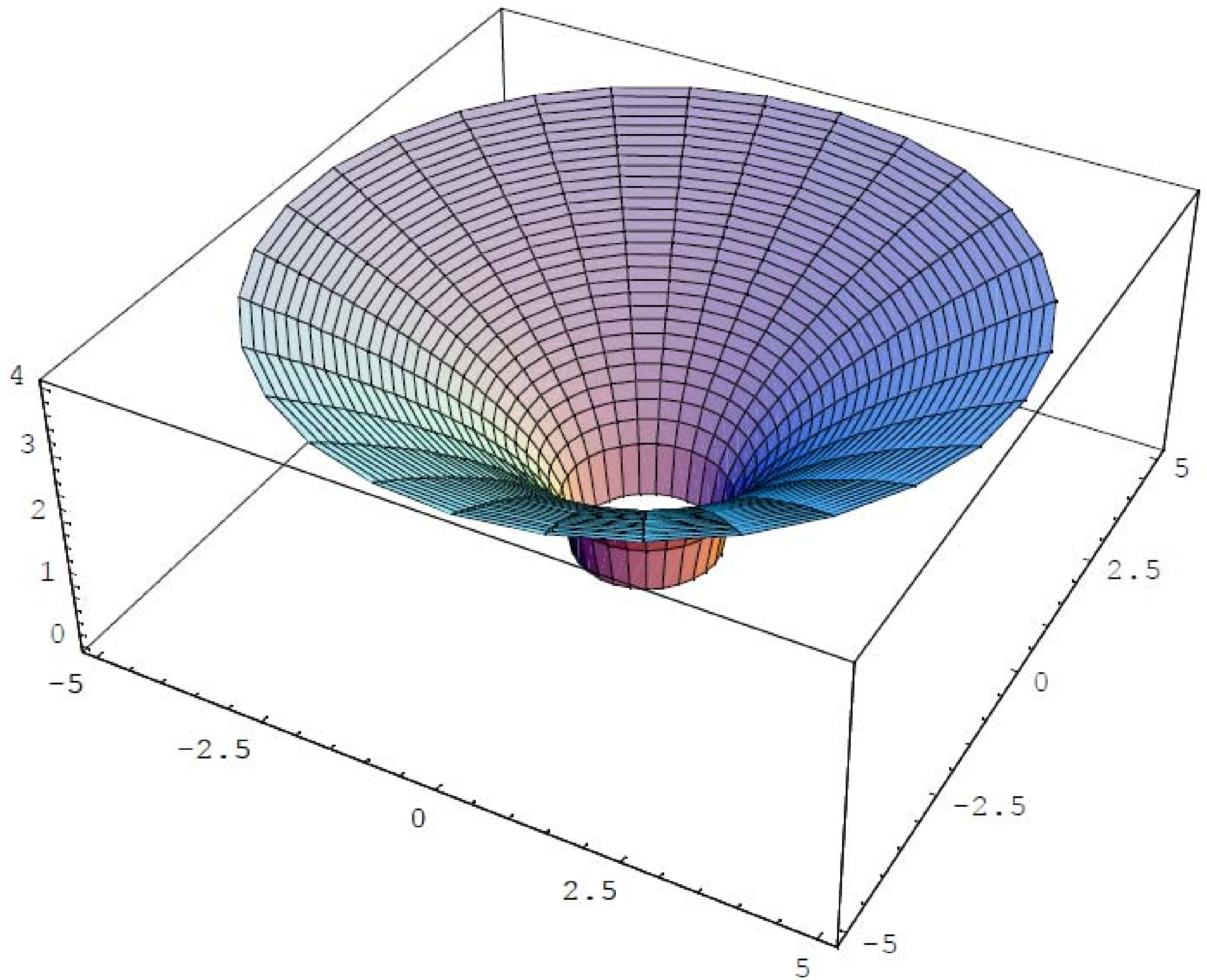
- 新しい軸(z軸)を作る。

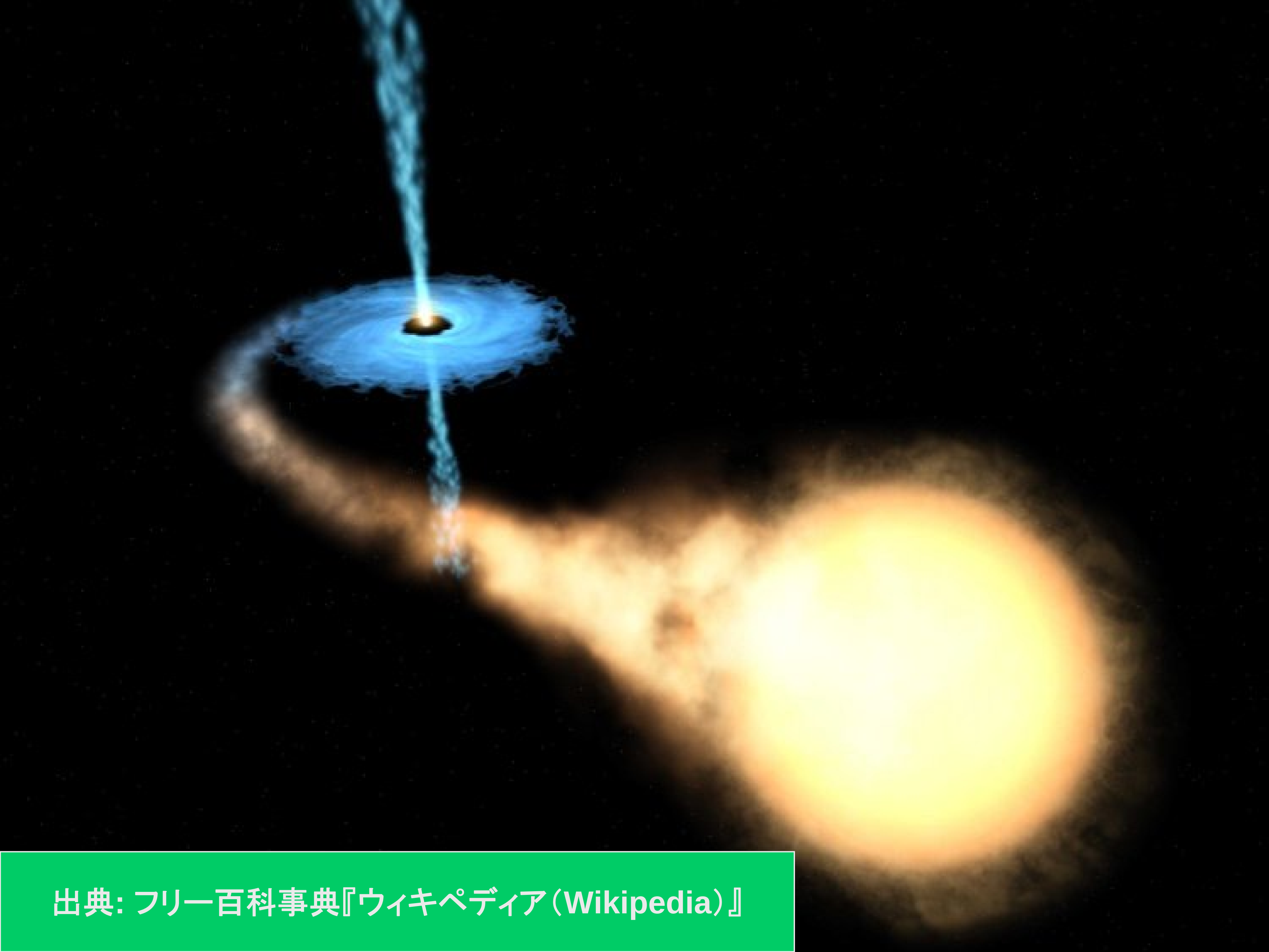


$$dz = \sqrt{(dL)^2 - (dr)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-a/r}(dr)^2 - (dr)^2} = \sqrt{\frac{a}{r-a}}dr$$

In[1]:= ParametricPlot3D$\left[\left\{r\,\mathrm{Cos}[t],\ r\,\mathrm{Sin}[t],\ 2\sqrt{r-1}\right\},\ \{t,\ 0,\ 2\pi\},\ \{r,\ 1,\ 5\}\right]$





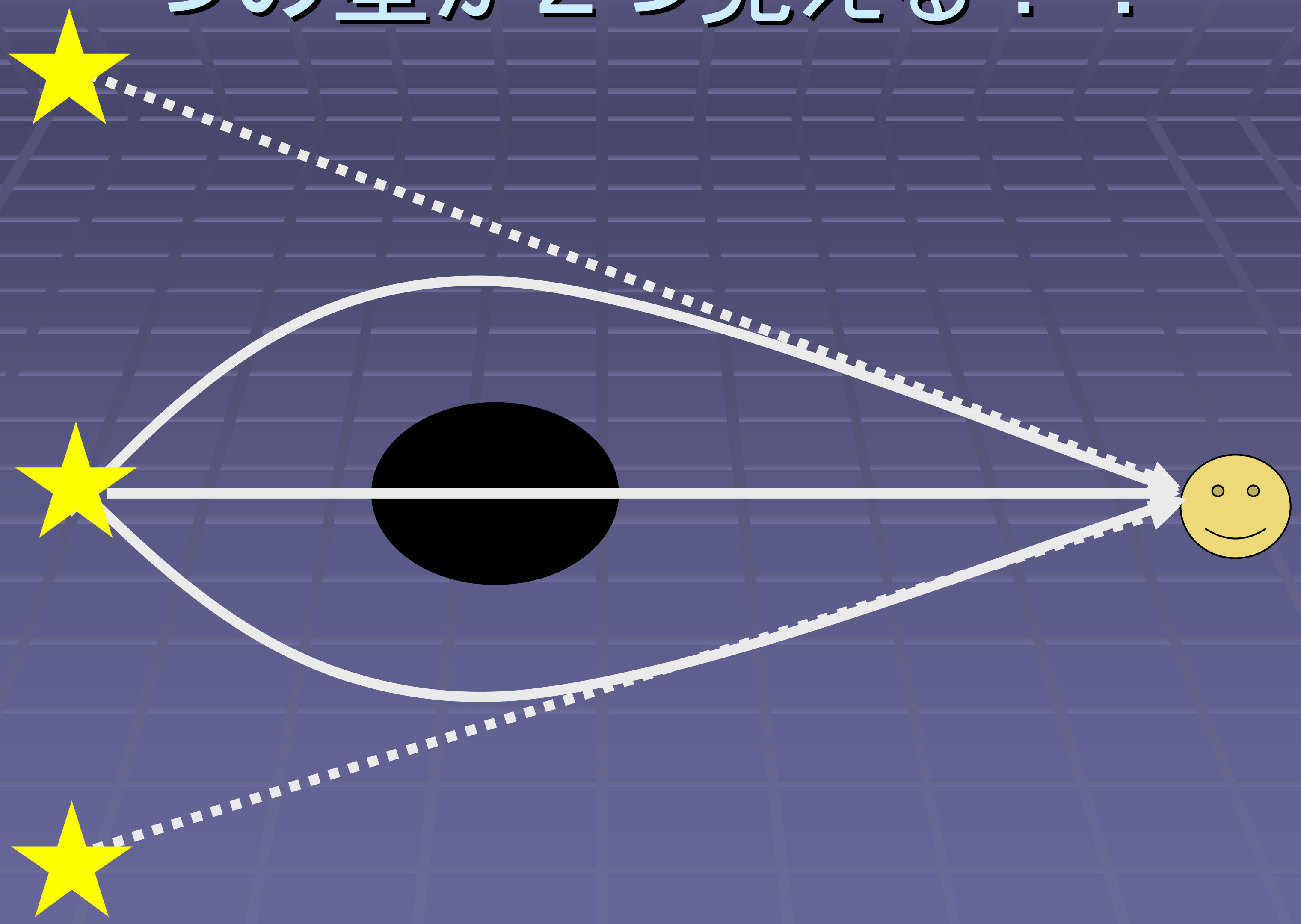
出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

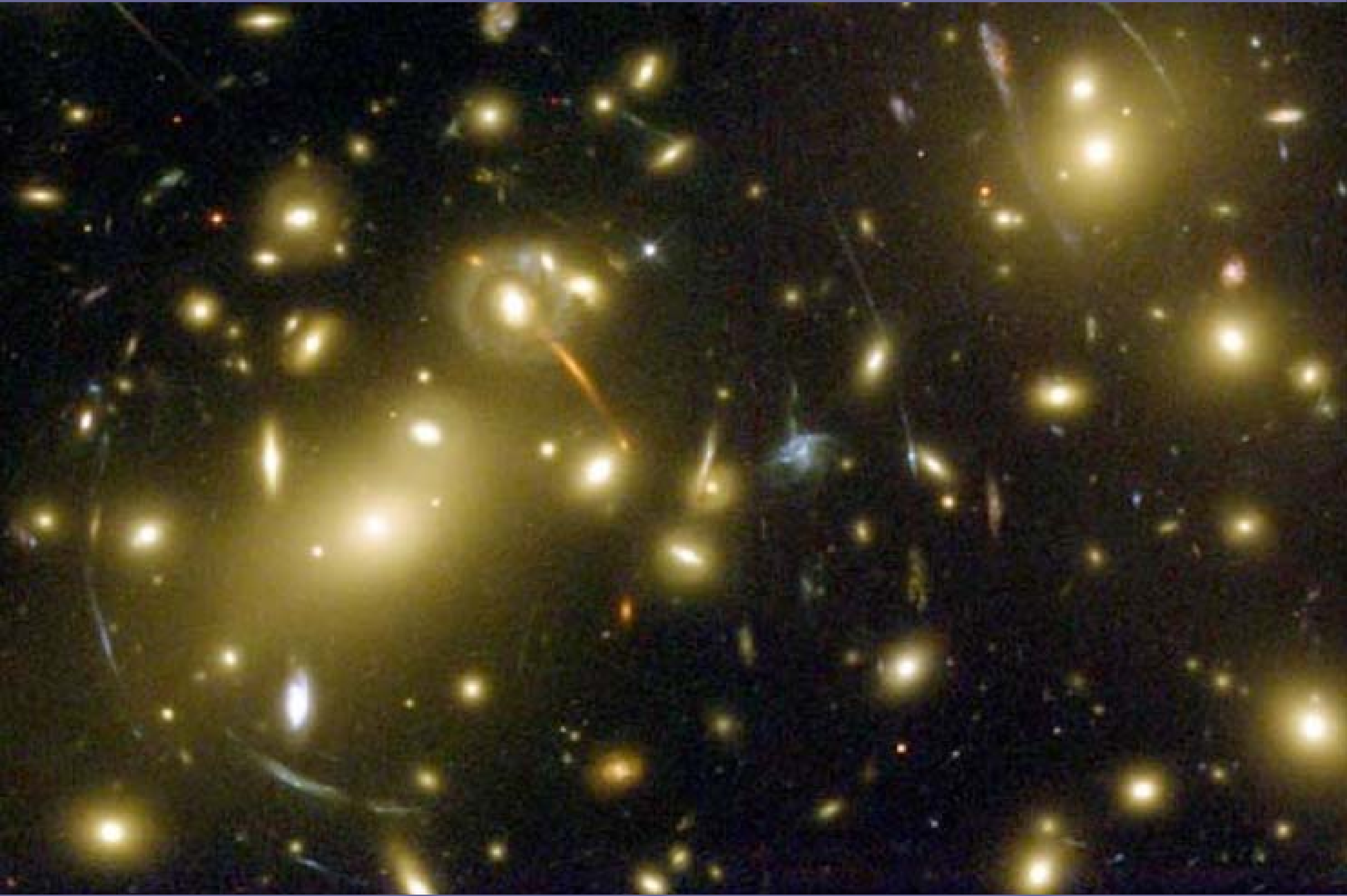
絵あるBHは、非対称

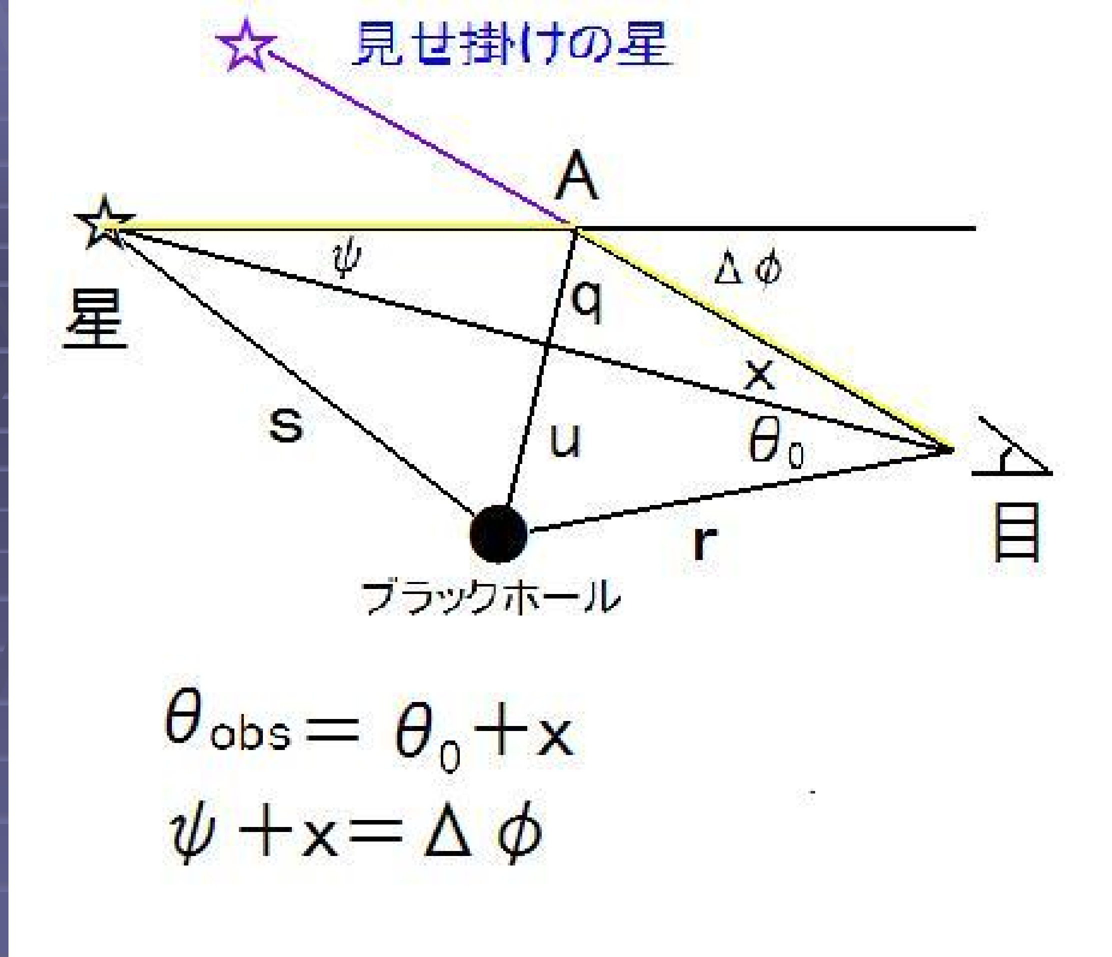
- 絵のBHは、別解のもの。
- 「カーの解」とよばれており、軸対称の解。
- シュワルツシルト解を改良したもの。

BHによる不思議な現象

一つの星が2つ見える！？

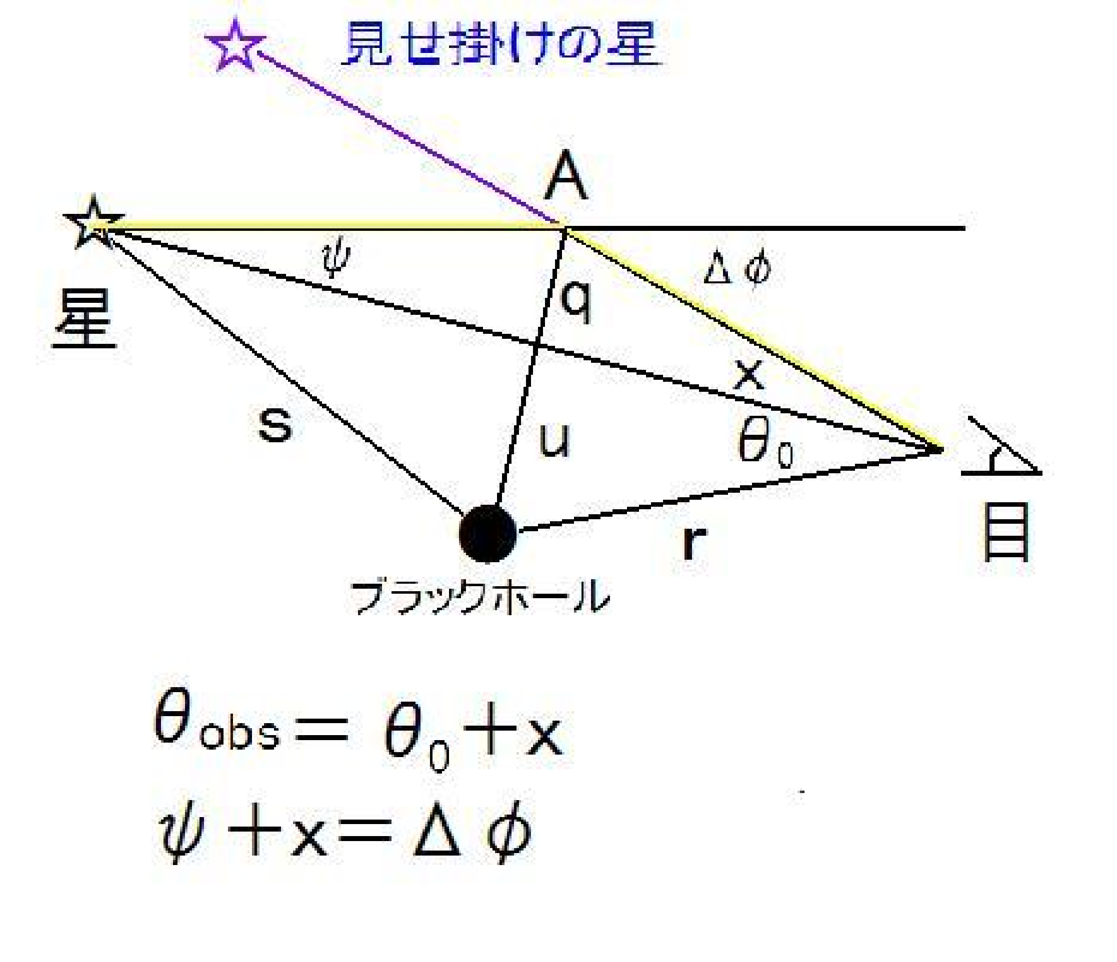






$$\psi = \frac{q}{s}, \quad x = \frac{q}{r}, \quad \theta_0 = \frac{u}{r}, \quad \theta_{obs} = \frac{b}{r} = \frac{q+u}{r}$$

$$\theta_{obs} = \theta_0 + x = \theta_0 + \Delta\phi - \psi$$



$$\Delta\phi \approx \frac{G}{c^2}\frac{4M}{b}, \quad b = q + u = \text{インパクト係数}$$

（シュバルツシルトの解から導かれる）

$$\theta_{obs} = \theta_0 + x = \theta_0 + \Delta\phi - \psi = \theta_0 + \frac{G}{c^2}\frac{4M}{b} - \psi$$

$$= \frac{u}{r} + \frac{4M}{r\theta_{obs}} - \frac{q}{s} = \frac{u}{r} + \frac{G}{c^2}\frac{4M}{r\theta_{obs}} - \frac{q+u}{s} + \frac{u}{s}$$

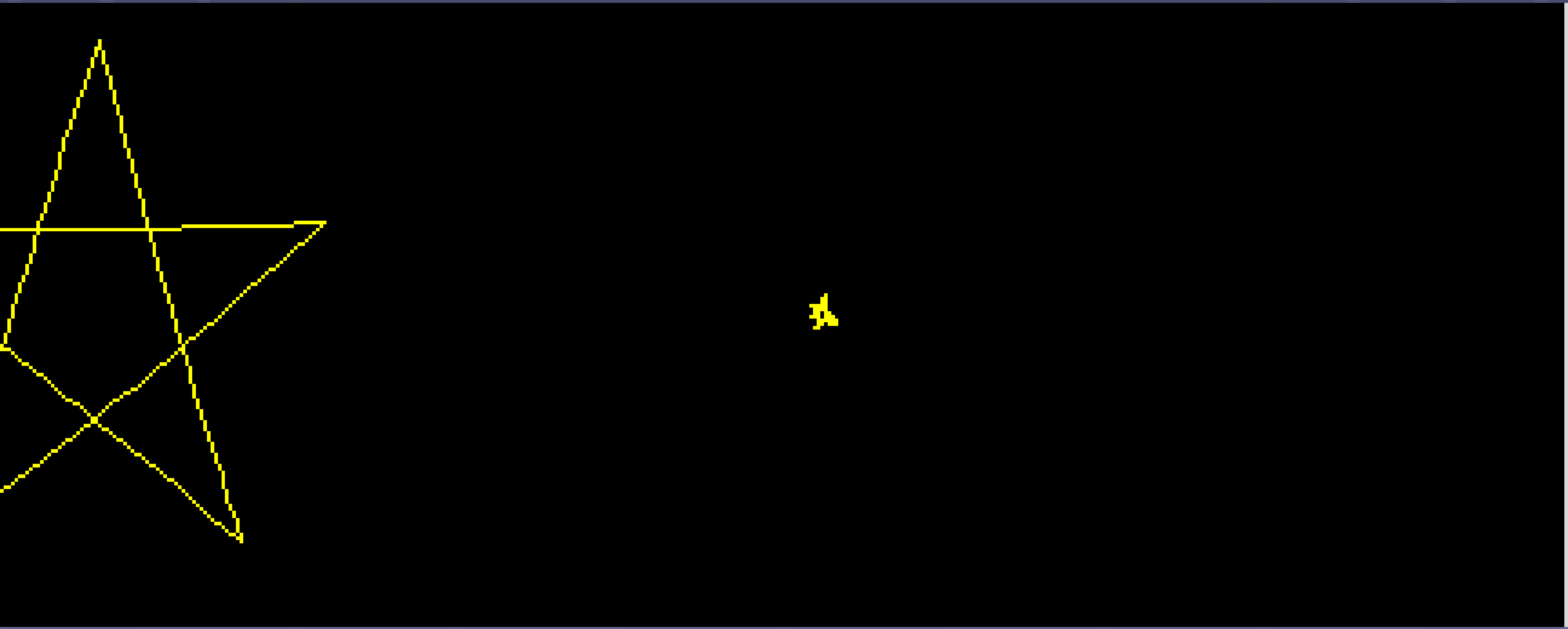
$$= \left(1 + \frac{r}{s}\right)\frac{u}{r} - \frac{r}{s}\frac{q+u}{r} + \frac{G}{c^2}\frac{4M}{r\theta_{obs}}$$

$$= \left(1 + \frac{r}{s}\right)\theta_0 - \frac{r}{s}\theta_{obs} + \frac{G}{c^2}\frac{4M}{r\theta_{obs}}$$

$$\therefore \theta_{obs} = \theta_0 + \left(1 + \frac{r}{s}\right)^{-1}\frac{G}{c^2}\frac{4M}{r\theta_{obs}}$$

θ_{obs}についての２次方程式＝解が２つある。

ブラックホールによる食
アインシュタイン・リング



水星の近日点前進

	周期（年）	予想値（秒/100年）	観測値（秒/100年）
水星	0.2409	43.0	43.08±0.3
金星	0.6152	8.63	8.6
地球	1.0000	3.84	3.8
火星	1.8809	1.35	

P. Bretagnon, Astron. Astrophys. 114 (1984) 278.
R. L. Duncombe, Astron. J. 61 (1956) 174.

宇宙の起源と広がり

宇宙原理

- 空間は一様で等方的に広がっている。

↓

我々の3次元空間は、4次元球（あるいは4次元双曲面）張り付いている。

4次元双曲面座標：(r, χ, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = r\sinh\chi\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sinh\chi\sin\theta\sin\phi \\ z = r\sinh\chi\cos\theta \\ w = r\cosh\chi \end{cases}$$

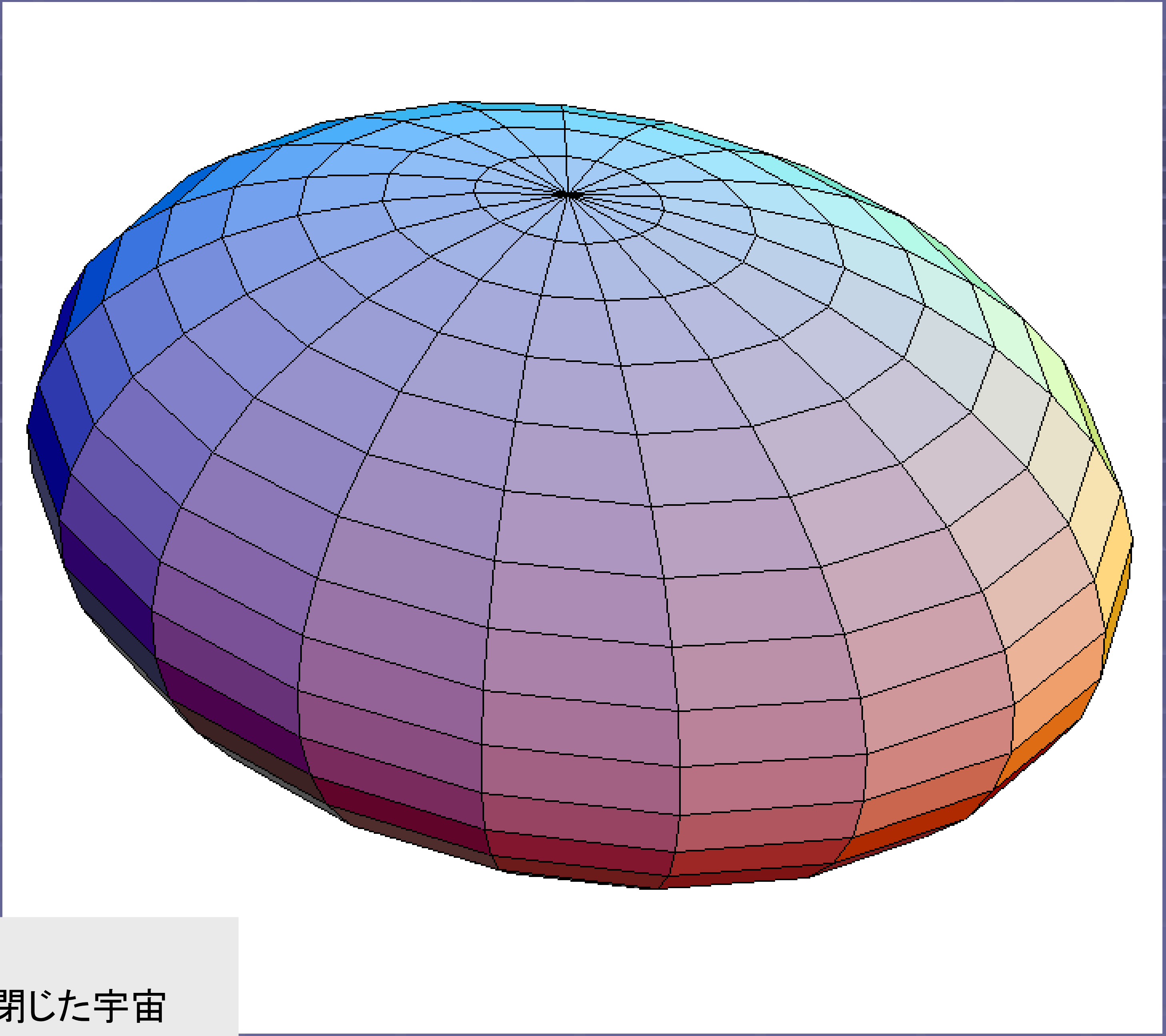
$$(\mathrm{d\,L})^2 = R^2(d\chi)^2 + R^2\sinh^2\chi\left\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right\}$$

ここで、改めてr＝R sinh χと読みかえる。

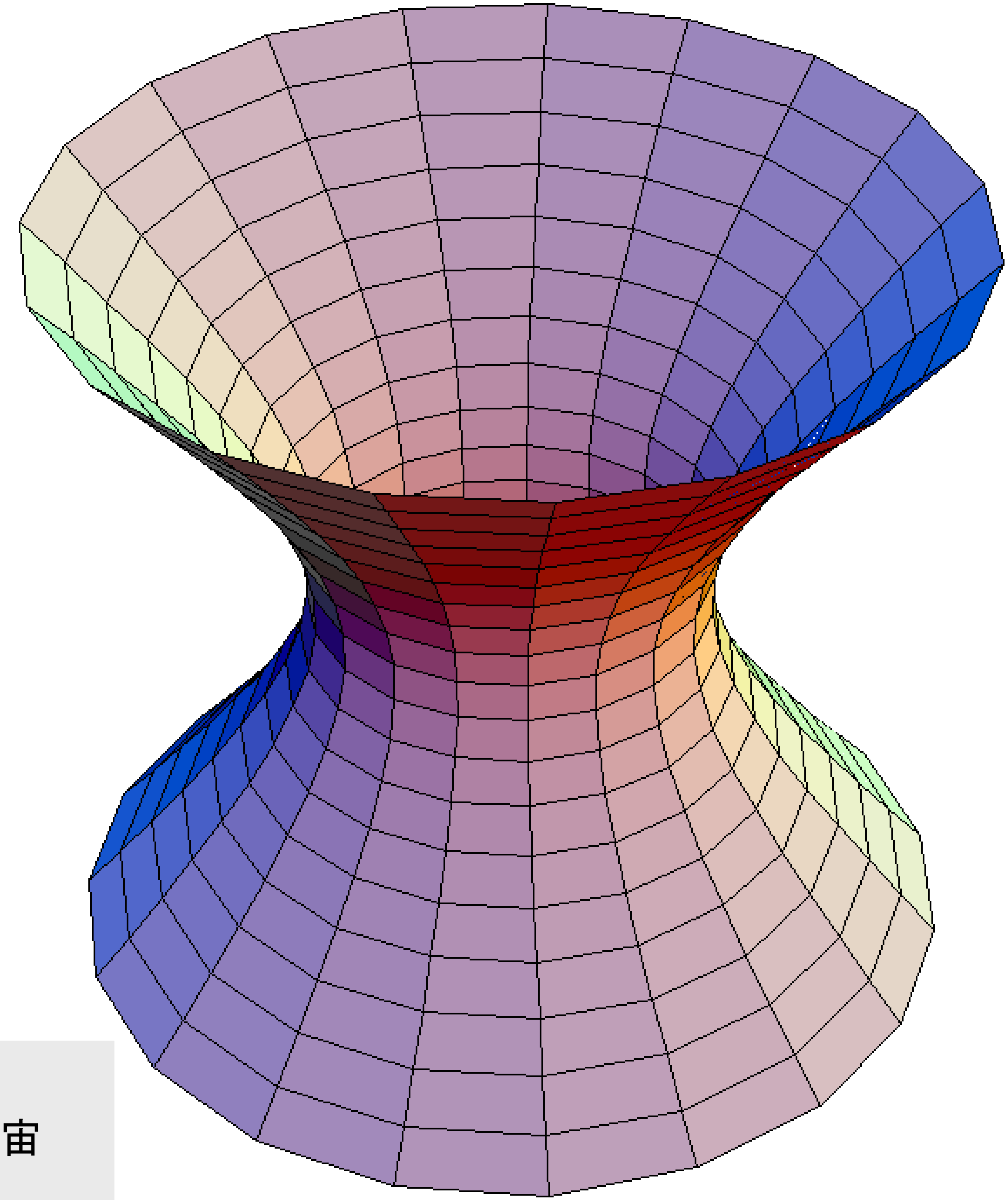
$$(\mathrm{d\,L})^2 = R^2 (d\chi)^2 + R^2 \sinh^2 \chi \left\{ (d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{1 + r^2 / R^2} (dr)^2 + r^2 \left\{ (d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\phi)^2 \right\}$$

R: 曲率半径　K=－1/R^2
K=0･･･　平坦な宇宙
K＞0･･･4次元球面上の宇宙（閉じた宇宙）
K＜0･･･4次元双曲面上の宇宙　（開いた宇宙）



K＞0：閉じた宇宙



K＜0：開いた宇宙

ハッブルの法則

- 遠い天体ほど、太陽系から速い速度で遠ざかってゆく。
- 膨張宇宙を意味している。

$R(t)$: 天体までの距離

$$\frac{dR(t)}{dt} = H_0 R(t)$$

$R(t) = R_0 a(t)$　とおくと同じ方程式を得る。

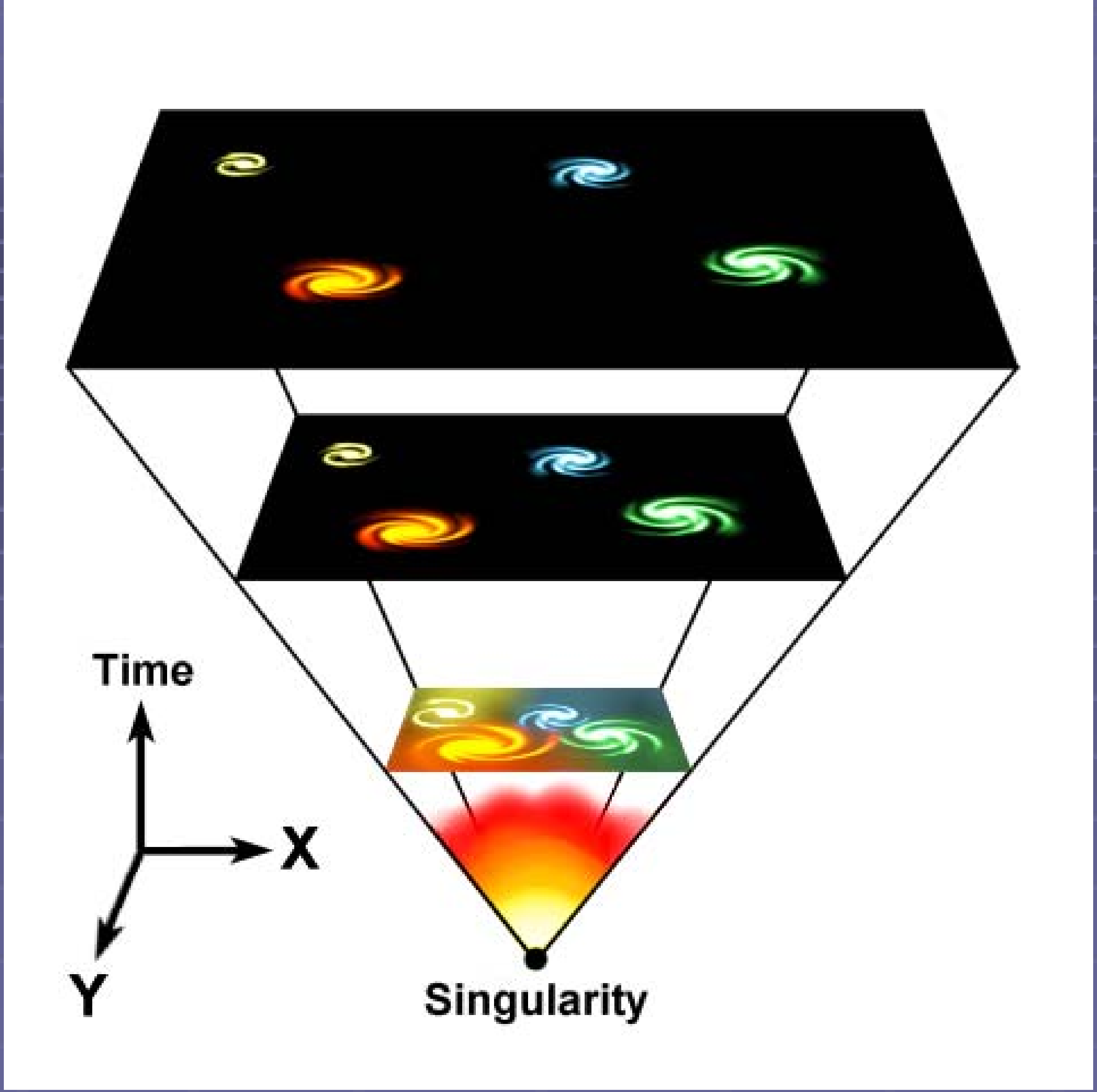
$$\frac{da(t)}{dt} = H_0 a(t)$$

H_0:ハッブル定数、$a(t)$:スケール因子

H_0=63±１２km/(sec・Mpc）

エドウィン・パウエル・ハッブル
Edwin Powell Hubble（1889-1953）
アメリカの天文学者。我々の銀河系の外にも銀河が存在することや、それらの銀河からの光が宇宙膨張に伴って赤方偏移していることを発見したことで知られている。彼は近代を代表する天文学者の一人であり、現代の宇宙論の基礎を築いた人物である。

Edwin Powell Hubble (1889～1953年)
〔NASA 提供〕



出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

ロバートソン･ウォーカー時空

- 宇宙原理（4次元面上の3次元空間）とスケール因子を組み合わせる。

$$c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 - (dL)^2$$

平坦な宇宙

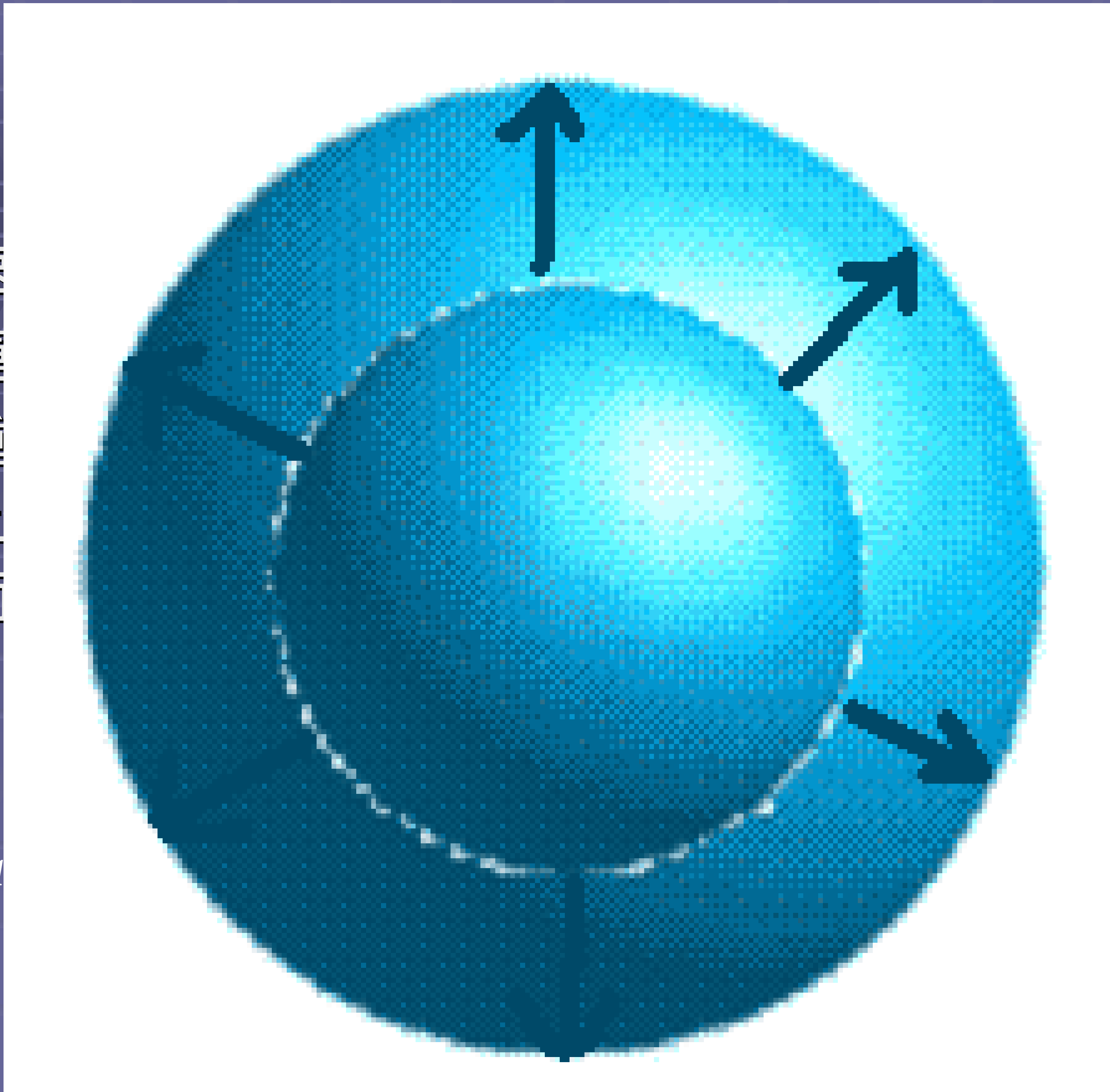
膨張する宇宙

$$c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 - a^2(t)(dL)^2$$
$$= c^2(dt)^2 - a^2(t)\left[\frac{1}{1+r^2/R^2}(dr)^2 + r^2\left\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\right\}\right]$$

Howard Percy Robertson (1903 – 1961) 、**Arthur Geoffrey Walker**（1909- 2001)

- 速
- 運
- 重
- エ
  両

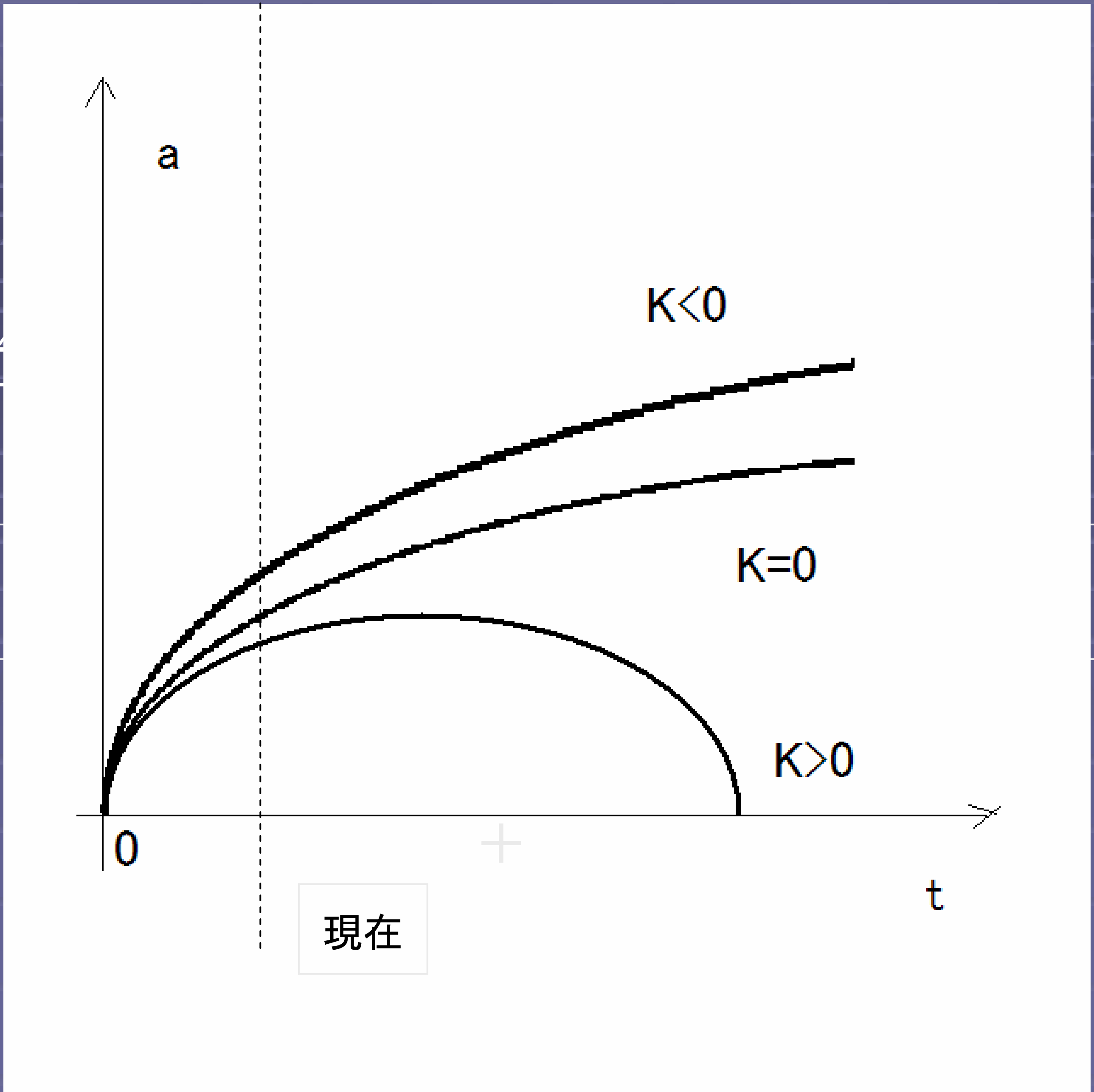
$r = a$



子
）
量

$\frac{1}{2}\left(\dot{a}\right.$

$M =$

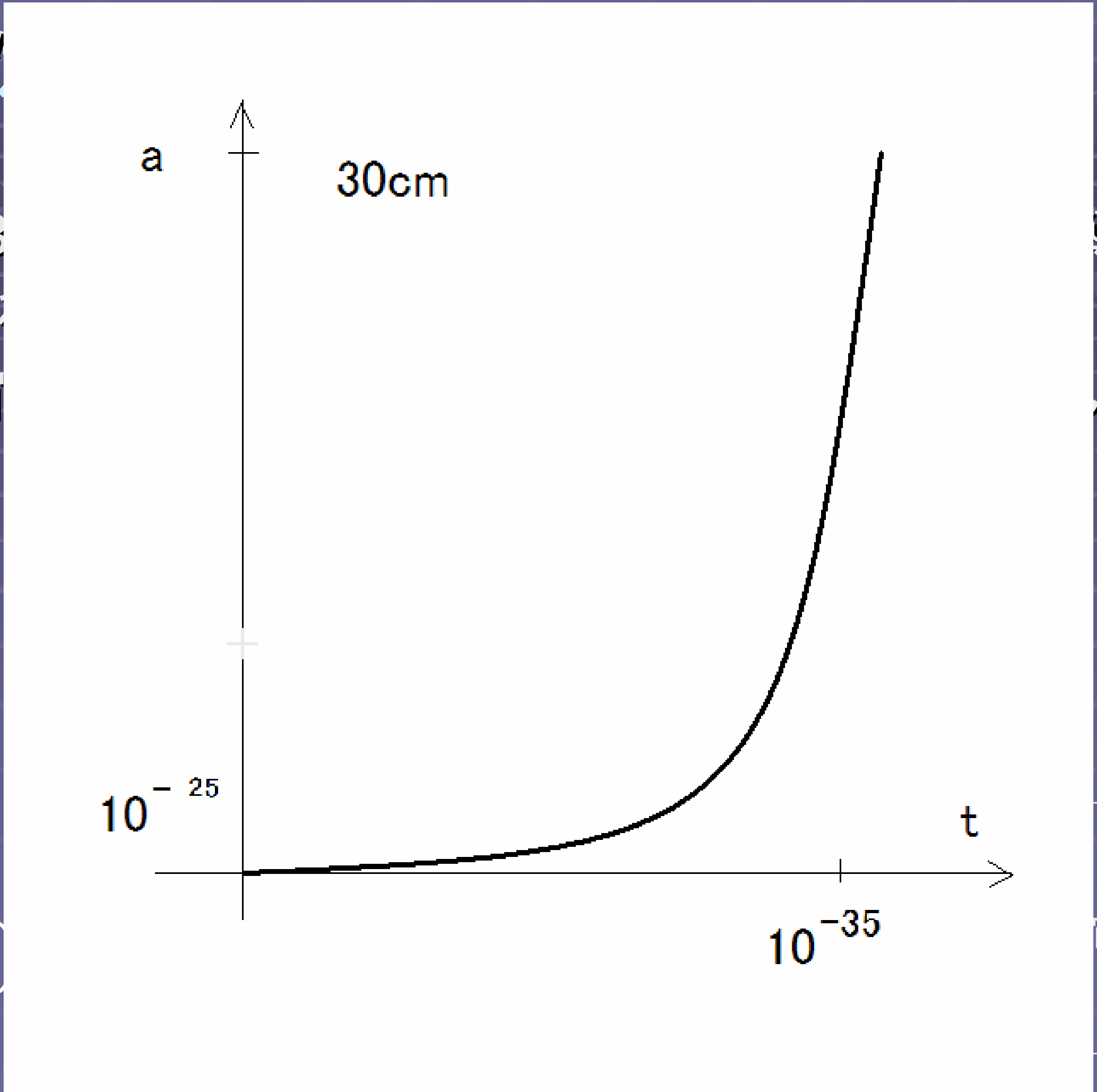


Alexander Alexandrovich Friedman or Friedmann (1888-1925)

アレキサンダー・フリードマン
ロシアの天文学者、数学者

- 198 … 導
  入さ
- 宇宙 … い
  大き

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$



$a(t)$

宙

まとめ

- ハッブルの法則から、現在の宇宙は膨張している。
- 宇宙の運命を決めるフリードマン方程式は、ロバートソン・ウォーカー時空と一般相対性理論の宇宙方程式によって導かれる。
- フリードマン方程式によって、宇宙はどこまで膨張し続けるのかが理解できる。
- 宇宙の初期にインフレーション宇宙があった。（佐藤・グース理論）

参考文献

- 「なっとくする宇宙論」二間瀬敏史著（講談社）
- 「相対性理論」中野薫夫著（岩波書店）
- 「一般相対性理論入門」 エドウィン･F･テイラー他著（Pearson, Education Japan)
- [相対性理論」窪田高弘、佐々木隆　共著（裳華房テキストシリーズ･物理学）
- 「相対性理論」内山龍雄著（岩波全書）
- 「デラック･一般相対性理論」江沢洋訳（東京図書）