等価原理と非ユークリッド幾何学

数理情報基礎講座　　　鎌田裕之

2章
等価原理と非ユークリッド幾何学

- 時間変数と3個の空間座標の４次元時空は、ミンコフスキーとよばれ、４次元ユークリッド空間と似た性質をもつ。そこでは、空間的なベクトルと時間を含めた4元ベクトルを定義する。
- ベクトル場や、テンソルには「反変性」と「共変性」といわれる性質が重要になる。計量テンソルは、時空間の性質を表わすもので、等価原理によって導かれるアインシュタインの重力場の方程式は、これを決定する。ここでは非ユークリッド幾何学が成り立っている。重力による空間の歪みによって、ブラックホールなどが予想され、それは実際に存在するといわれている。

ベクトルの大きさ: スカラー

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2$ （長さ）

→ ピタゴラスの定理

- $c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ （固有時）

→変形ピタゴラスの定理

基本テンソル: $\eta_{\mu\nu}$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2$$

$$= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^0)^2$$

$$H = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ローレンツ変換

- 電車の中（S’系：x’、y’、z’、t’）
- 電車の外（S　系：x、y、z、t）

電車の進む方向をx方向に仮定すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

となる。

ローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{\mathrm{v}}{c},$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$A = \alpha_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x^\nu = \sum_\mu \alpha_\mu^\nu x^\mu{}',$$

$$dx^\nu = \sum_\mu \alpha_\mu^\nu dx^\mu{}'$$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu{}' dx^\nu{}',$$

$$= \sum_{\mu,\nu,\lambda,\kappa} \eta_{\mu\nu} \alpha_\lambda^\mu \alpha_\kappa^\nu dx^\lambda dx^\kappa,$$

$$\therefore$$

$$\eta_{\lambda\kappa} = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \alpha_\lambda^\mu \alpha_\kappa^\nu = \eta_{\mu\nu} \alpha_\lambda^\mu \alpha_\kappa^\nu,$$（アインシュタインの和則）

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$$（クロネッカーのデルタ）

共変ベクトルと反変ベクトル

$$a_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\nu}$$

共変ベクトル

反変ベクトル

４元速度ベクトル

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau},$$

$$u^{\mu}{}' = \alpha^{\mu}_{\nu} u^{\nu},$$

４元ベクトルの内積

$$a \bullet b \equiv a^{\mu} b_{\mu} = b^{\mu} a_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}$$

α、βをx$^\mu$で書く

$$\beta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu}{}'}, \quad Jacobian$$

$$\alpha_\mu^\nu = \frac{\partial x^{\nu}{}'}{\partial x^\mu},$$

$$\left[\alpha_\mu^\nu\right]^{-1} = \beta_\mu^\nu$$

共変ベクトル場

$$S_{,\mu}(x) \equiv \frac{\partial S(x)}{\partial x^{\mu}}$$

スカラー場

$$S'_{,\mu}(x') = \beta^{\nu}_{\mu} S_{,\nu}(x)$$

スカラー場の微分は、ベクトルになる。

２次形式

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2$　　　　（長さ）

→　ピタゴラスの定理

- $c^2\tau^2 = c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$　　（固有時）

→変形ピタゴラスの定理

２次形式

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a\,xy + b\,yz + c\,zx$

どうしてピタゴラスの定理は、

a=b=c=0なのか！？

- 平らな空間（ユークリッド幾何学）→a=b=c=0
- 曲がった空間（リーマン幾何学）→$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

ユークリッド

- Eukleides

(紀元前365年? - 紀元前275年?)

古代ギリシアの数学者、天文学者とされる。いわゆる『原論』(ユークリッド原論)の著者である。ただし、実在を疑う説もある。その説によると、『原論』は複数人の共著であり、エウクレイデスは共同筆名である。

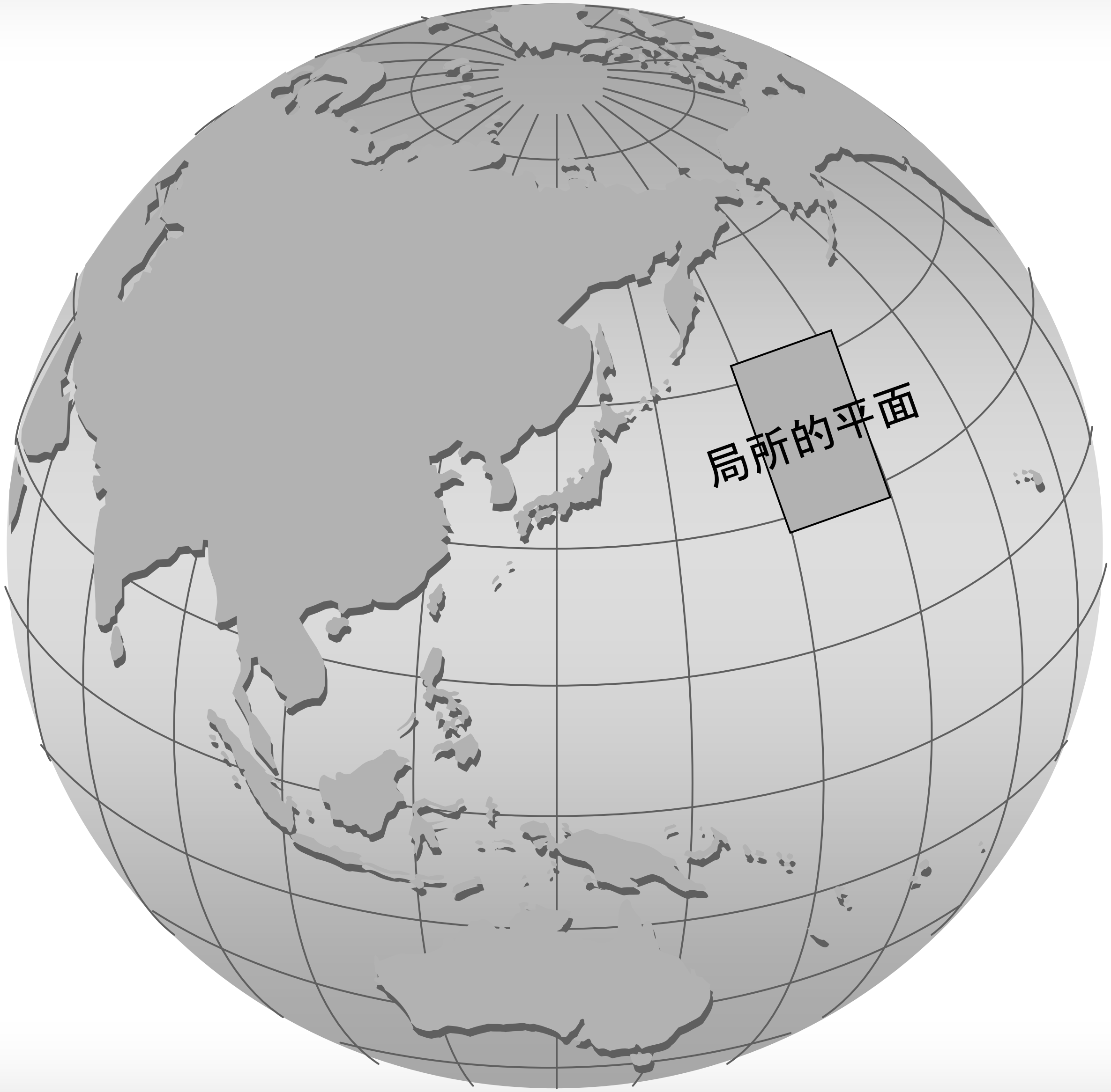
リーマン

- **Georg Friedrich Bernhard Riemann**,（1826年- 1866年）はドイツの数学者。解析学、幾何学、数論の研究は、現代数学への発展に大きな影響を与えた。だが、病身のために、その研究生活は短く、先駆的な彼の研究は一部の数学者を除くと当時あまり理解されなかった。ただ、リーマン幾何学についての講演については、数学者ガウスが興奮のあまり、同僚にしばらくこの着想のすばらしさを語りつづけたといわれる。リーマンの数学は20世紀になると多くの分野で再評価され、現在では、19世紀を代表する数学者の一人と考えられている。

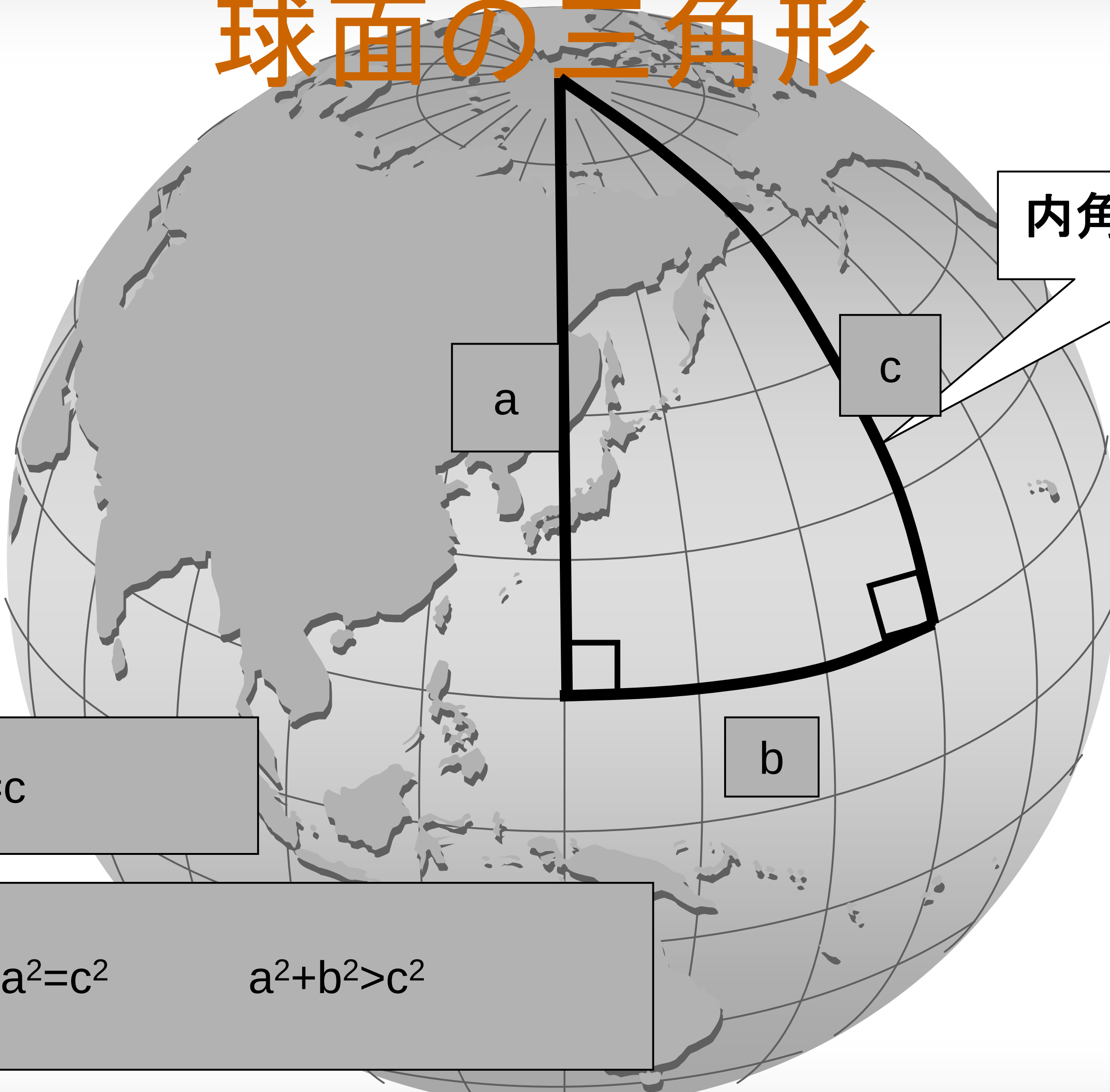
リーマン幾何学

- 「空間が曲がっている」

- 三角形の内角の和が１８０°にならない。
- 面積＝底辺×高さ÷２が成り立たない。


局所的平面

球面の三角形

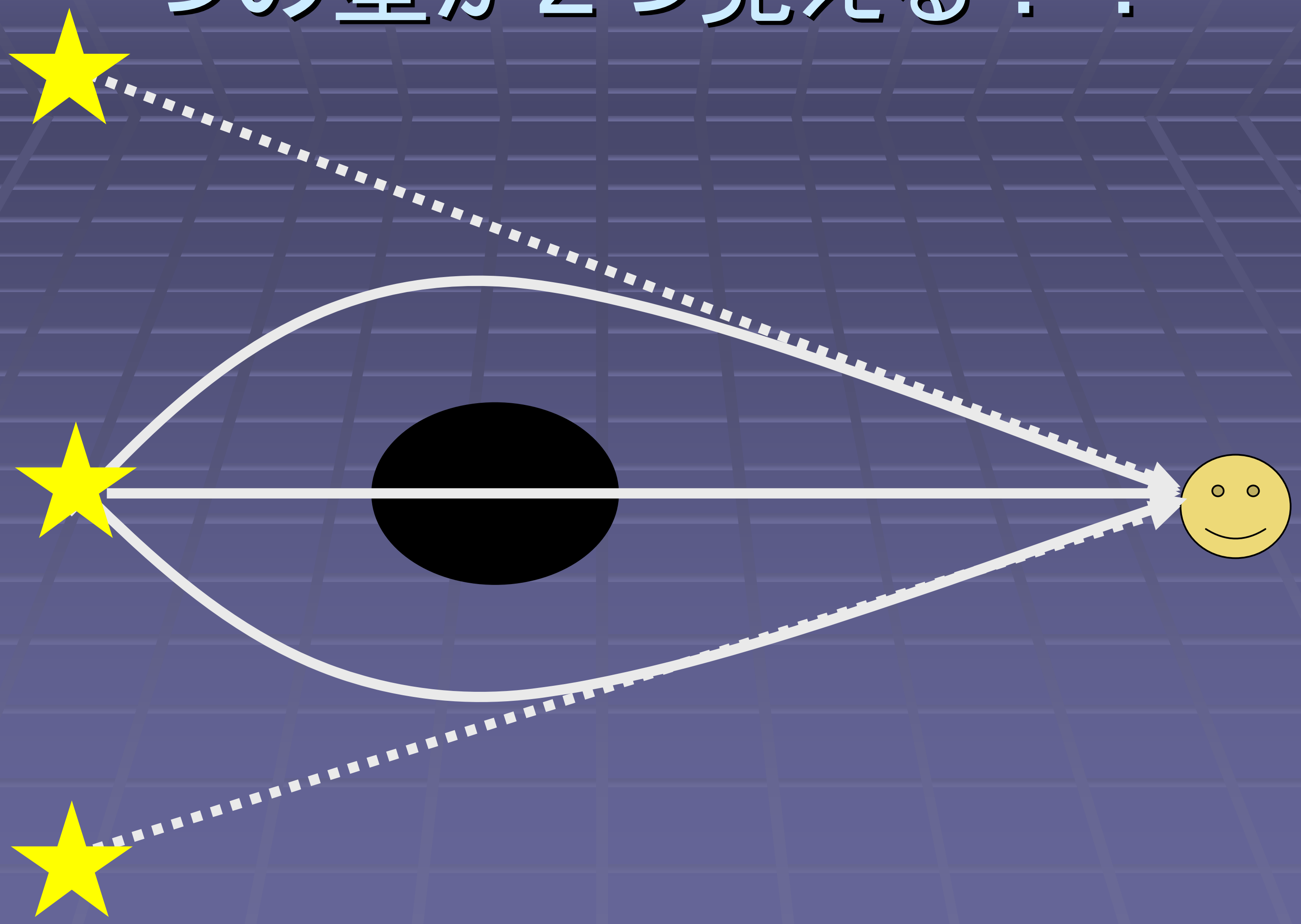


$a=c$

$\therefore a^2=c^2$ $\quad a^2+b^2>c^2$

ピタゴラスの定理が成り立たない！

一つの星が2つ見える！？



リーマン幾何学

- 「空間が曲がっている」

- 三角形の内角の和が１８０°にならない。
- 面積＝底辺×高さ÷２が成り立たない。

- なぜ、空間が曲がるのか？

↓

- 重力によって空間が曲がる。

ベクトル場の微分は、テンソルか？

$$\partial_\nu A_\mu(x) \to \partial'_\nu A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}A_\rho(x)\right)$$

$$= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\partial_\lambda A_\rho(x) + \left(\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\right)A_\rho(x)$$

おつりが出てしまう。

共変微分

$$\nabla_\nu A_\mu(x) \equiv \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda$$

反変ベクトルの共変微分

$$\nabla_\nu A^\mu(x) \equiv \partial_\nu A^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma$$

Γ は、リーマン接続係数、アフェイン係数という。

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ の条件

恒等式

$$\partial'_\nu A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\partial_\lambda A_\rho(x) + \left(\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\right)A_\rho(x)$$

$$\nabla'_\nu A'_\mu(x) = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\left\{\nabla_\sigma A_\rho(x)\right\}$$

テンソルの条件

$$\partial'_\nu A'_\mu(x') - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} A'_\lambda = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\left\{\partial_\sigma A_\rho(x) - \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} A_\tau(x)\right\}$$

$$\boxed{\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\tau}\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}(x) + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma}}$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

特殊相対論では、η は定数。

$$(ds)^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}$$

計量テンソルの共変微分

- リーマン幾何学上での平行移動:

$$A^{\mu}(x+\Delta x)_{\parallel} = A^{\mu}(x) - \Delta x^{\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(x)A^{\lambda}(x)$$

- 平行移動ではベクトルのスカラー積は不変:

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)A^{\mu}(x+\Delta x)_{\parallel}A^{\nu}(x+\Delta x)_{\parallel} = g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)A^{\nu}(x)$$

$\Downarrow$ 導く

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} = 0$$

クリストッフェルの三指標記号 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

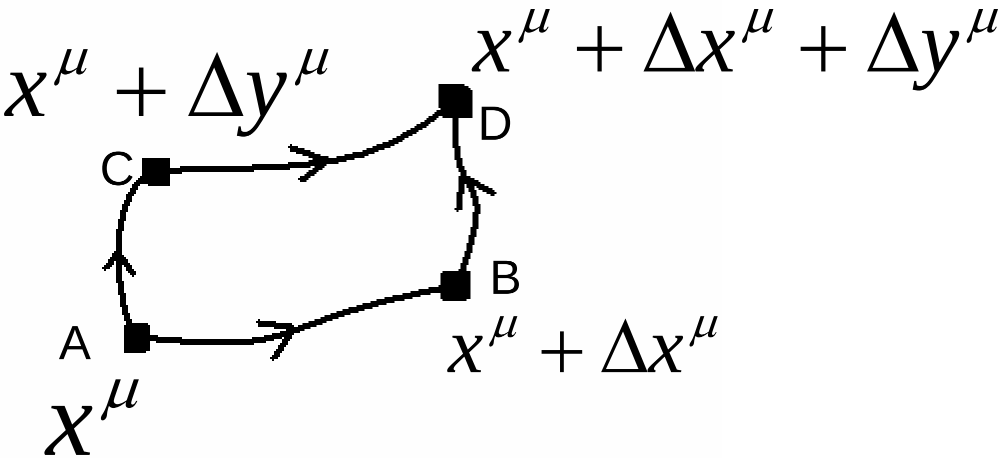
$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

解く

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} = 0$$

Γは、リーマン接続係数、アフェイン係数という。

曲率



経路:A→B→D

経路:A→C→D

$$A_\mu(x+\Delta x)_{\parallel} = A_\mu(x+\Delta x) - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x)$$

$$A_\mu(x+\Delta y)_{\parallel} = A_\mu(x+\Delta y) - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x)$$

曲率

経路:A→B→D

$$A_\mu(x+\Delta x+\Delta y)_{\|} = A_\mu(x+\Delta x+\Delta y) - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x+\Delta y)$$

$$- \Delta y^\lambda \nabla^\lambda \left\{ A_\mu(x+\Delta x) - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \right\}$$

$$= A_\mu(x+\Delta x+\Delta y) - \Delta x^\nu \nabla_\nu \left\{ \Delta y^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) + A_\mu(x) \right\}$$

$$-\Delta y^\lambda \nabla_\lambda \left\{ \left\{ \Delta x^\sigma \partial_\sigma A_\mu(x) + A_\mu(x) \right\} - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \right\}$$

$$= A_\mu(x+\Delta x+\Delta y) - \left(\Delta x^\nu + \Delta y^\nu \right) \nabla_\nu A_\mu(x)$$

$$-\left(\Delta x^\nu \Delta y^\lambda + \Delta y^\nu \Delta x^\lambda \right) \partial_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x) + \Delta y^\lambda \Delta x^\nu \nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x)$$

曲率

経路：A→C→D

$$A_\mu(x+\Delta y+\Delta x)_{\|} = A_\mu(x+\Delta y+\Delta x) - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x+\Delta y)$$

$$-\Delta x^\lambda \nabla^\lambda \left\{ A_\mu(x+\Delta y) - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \right\}$$

$$= A_\mu(x+\Delta y+\Delta x) - \Delta y^\nu \nabla_\nu \left\{ \Delta x^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) + A_\mu(x) \right\}$$

$$-\Delta x^\lambda \nabla_\lambda \left\{ \left\{ \Delta y^\sigma \partial_\sigma A_\mu(x) + A_\mu(x) \right\} - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \right\}$$

$$= A_\mu(x+\Delta y+\Delta x) - \left(\Delta y^\nu + \Delta x^\nu \right) \nabla_\nu A_\mu(x)$$

$$-\left(\Delta y^\nu \Delta x^\lambda + \Delta x^\nu \Delta y^\lambda \right) \partial_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x) + \Delta x^\lambda \Delta y^\nu \nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x)$$

曲率

$$\overset{\text{A→B→D}}{A_\mu(x+\Delta x+\Delta y)_{||}} - \overset{\text{A→C→D}}{A_\mu(x+\Delta y+\Delta x)_{||}} = \Delta x^\nu \Delta y^\lambda \left(\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda\right) A_\mu(x)$$

$$\left(\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda\right) A_\mu(x) \equiv -R^\sigma_{\mu\nu\lambda} A_\sigma(x)$$

$R^\sigma_{\mu\nu\lambda}$ 曲率テンソル

$$R^\sigma_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$$

リッチのテンソル

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = R_{\nu\mu}$$

スカラー曲率

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}$$

アインシュタイン・テンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

ビアンキ恒等式

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

エネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}_{matt}(x) + T^{\mu\nu}_{EM}(x)$$

$$T^{\mu\nu}_{matt}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\det[g]}} \sum_{i=1}^{N} m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^{\mu}(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^{\nu}(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4(x - x_i(\tau_i))$$

$$T^{\mu\nu}_{EM}(x) = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right)$$

電磁テンソル $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$$

電場

$$\vec{B}=(B_x,B_y,B_z)$$

磁束密度

マクスウェルの方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu = -\mu_0 (c\rho, \vec{j})$$

$$\begin{cases} div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 c^2 \rho \\ div\vec{B} = 0 \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\vec{B} = -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

ガウスの法則
ガウスの法則

ファラデーの法則
アンペール・
マクスウェルの法則

連続の式　(保存の式)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

エネルギーの保存

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$$

運動量の保存

重力方程式を作ろう。

材料

- 時空間を決めるテンソル:

アインシュタイン・テンソル $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

- ビアンキ恒等式 ⇒ $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$
- 物理的な保存の法則 ⇒ $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0$

もしかして・・・

$$G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu}$$

等価原理

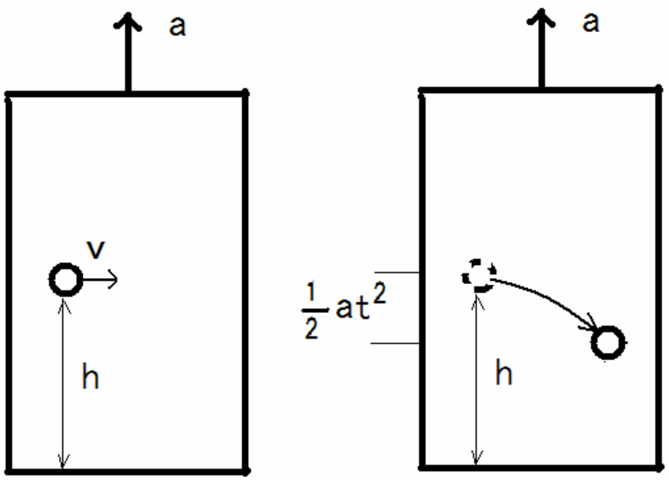
- 重力場で自由落下する系は、重力場のない系と同じ物理法則がなりたつ。
- フリーホール：ボックスの外を見ることができなければ、どの方向に落下しているのかわからない。

等価原理

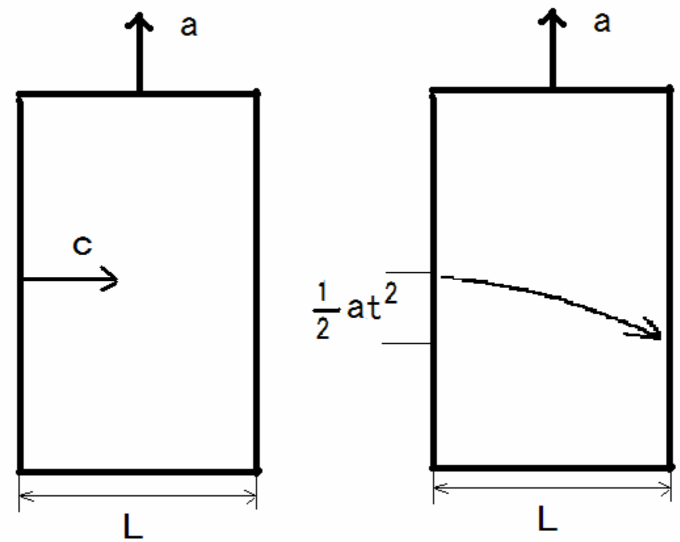
- 慣性質量と重力質量は本来同一のもので、加速度によって生じる見かけの力と重力とは原理的に区別できないものである。
- 適当な基準系を採用すれば、任意の世界点の近傍のごく小さい領域で重力の影響を消し去ることができる。

等価原理

- 全ての物理法則は、任意の座標系において、いつも同じ形で表される。



ボックスが加速度aで上昇している。
内部のボールを加速度に垂直に
速度vで放すと、放物運動をする。
これは、重力によるものと識別できるか？

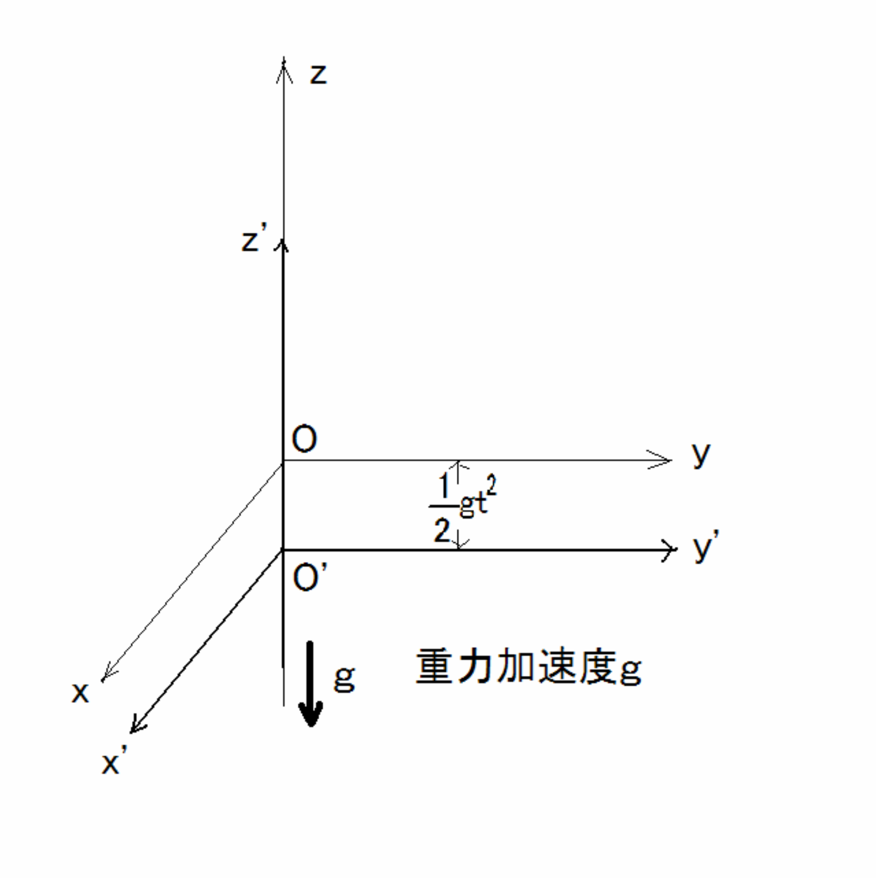


光の場合も同様に考えることができる。
→　光も落下する。

$t=L/c$

重力のない系とある系

- 重力のない系(局所慣性系)　(x', y', z')
- 重力のある系　(x, y, z)



$$
\begin{cases}
x' = x \\
y' = y \\
z' = z + \dfrac{1}{2}gt^2 \\
t' = t
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \frac{1}{2}gt^2 \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} dx' = dx \\ dy' = dy \\ dz' = dz + gtdt \\ dt' = dt \end{cases}$$

固有時の微分：dτ,　　原点付近(x’, y’, z’)＝(0, 0, 0)　∴z’＝0,

$$z = -\frac{1}{2}gt^2, t = \sqrt{-\frac{2z}{g}}$$ を代入すれば、

$$(ds)^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2(dt')^2$$

$$= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz + gtdt)^2 - c(dt)^2$$

$$= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + 2gtdzdt - \left(1 - \frac{g^2t^2}{c^2}\right)c^2(dt)^2$$

２次形式

$$L^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2byz + 2czx$$

$$= (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ a & 1 & b \\ c & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$-c^2\tau^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$= (ct, x, y, z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + 2gtdzdt - \left(1 - \frac{g^2t^2}{c^2}\right)c^2(dt)^2$$

$$= (cdt, z, y, z)\begin{pmatrix} -1 + \frac{g^2t^2}{c^2} & 0 & 0 & \frac{gt}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{gt}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cdt \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (cdt, z, y, z)\begin{pmatrix} -1 - \frac{2gz}{c^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{-2gz}}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{-2gz}}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cdt \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

計量テンソル(メトリック)：gμν

$$-c^2(d\tau)^2=\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -1-\frac{2gz}{c^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{-2gz}}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{-2gz}}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

$$g_{00}=-1-\frac{2gz}{c^2}=-1-\frac{2\Phi}{c^2}$$

Φは、単位質量当たりの重力ポテンシャル

比例定数κの決定

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}$$

$T^{00} \approx c$

定

$g_{\mu\nu}\Big(R^{\mu\nu}$ … $c^2 \rho$

$R^{00} \approx R_{00}$

… $+ \frac{1}{2} \kappa c^2 \rho$

$$\therefore -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} \kappa c^2 \rho = \kappa c^2 \rho$$

$$\therefore \nabla^2 \Phi = -\frac{c^4}{2} \kappa \rho$$

万有引力のポアソン方程式：

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$$

アインシュタインの重力方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

計量テンソルを決定する方程式＝重力方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$g_{\mu\nu}$: メトリック、$T_{\mu\nu}$: エネルギー運動量テンソル、

$R_{\mu\nu}$: リッチ・テンソル、R:リッチ・スカラー、

Λ：宇宙定数

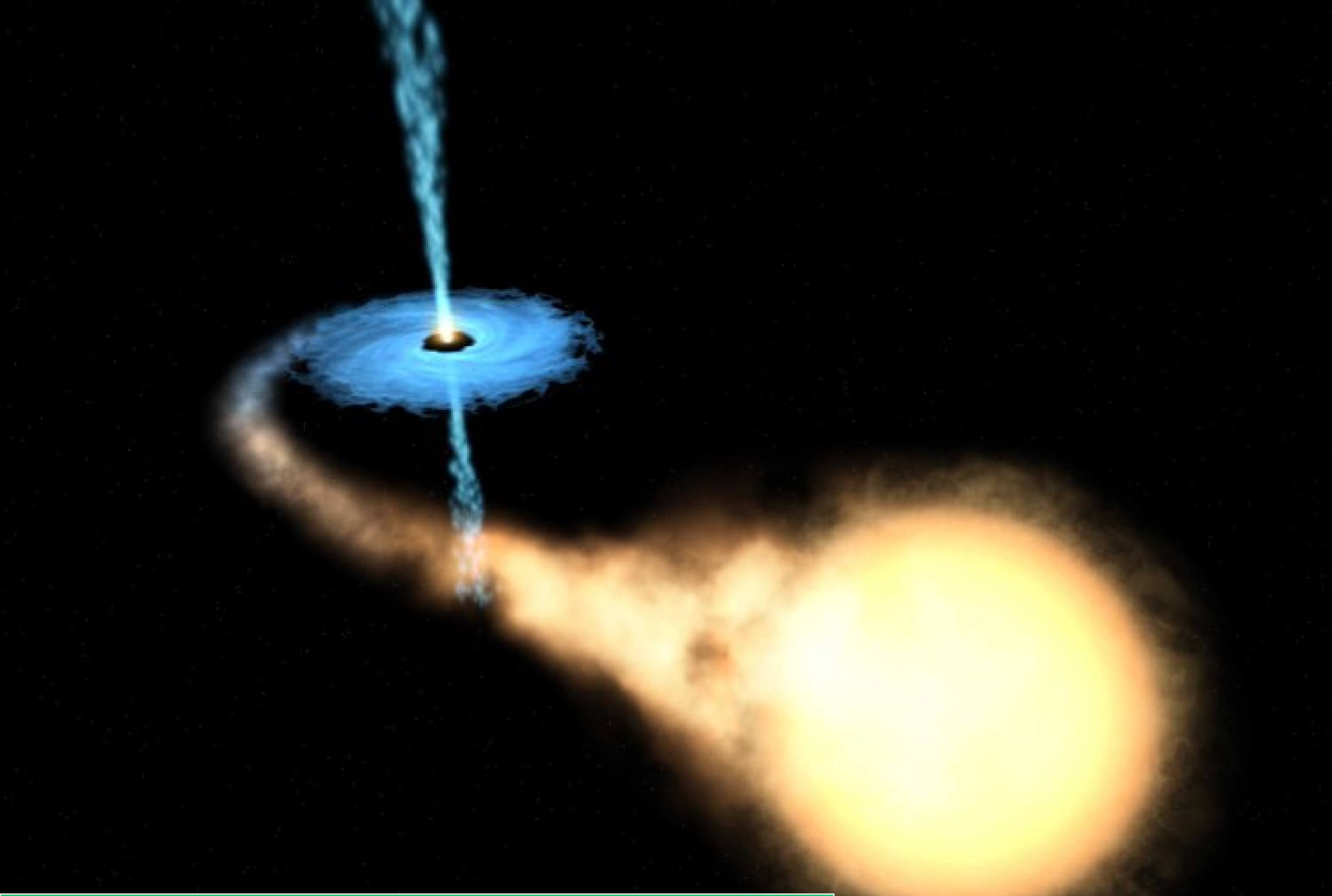
$$R_{\mu\nu} \equiv \sum_{\alpha=1}^{4} R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha}, \qquad R \equiv \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} \left[g_{\mu\nu} \right]^{-1} R_{\mu\nu}.$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} + \sum_{\sigma=1}^{4} \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} \right)$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{4} \left[g_{\mu\nu} \right]^{-1} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right)$$

重力方程式の解

- 一つの解として、「ブラック・ホール」解がある。



出典: フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

重力方程式の解

- 特別な解として、「ブラック･ホール」解

- 宇宙が膨張するか収縮するかを予想

  → 膨張する宇宙

  → ビッグバン

  宇宙の年齢（137億年）

  インフレーション宇宙（佐藤理論）
- 宇宙は、無限なのか有限なのかを予想

  → 閉じた宇宙

まとめ

- 特殊相対性理論

ミンコフスキー時空間（4次元）

→　ユークリッド幾何学（平らな時空）

- 一般相対性理論

→　リーマン幾何学（歪んだ時空）

- 重力方程式（アインシュタイン方程式）

→　ブラックホール、ビッグバン