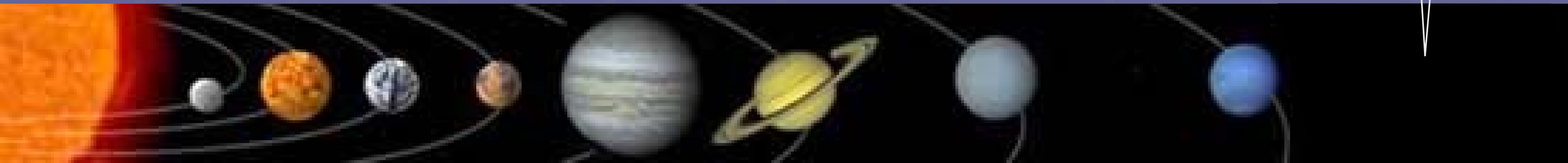
一般相対性論的宇宙論

数理情報基礎講座　　鎌田裕之

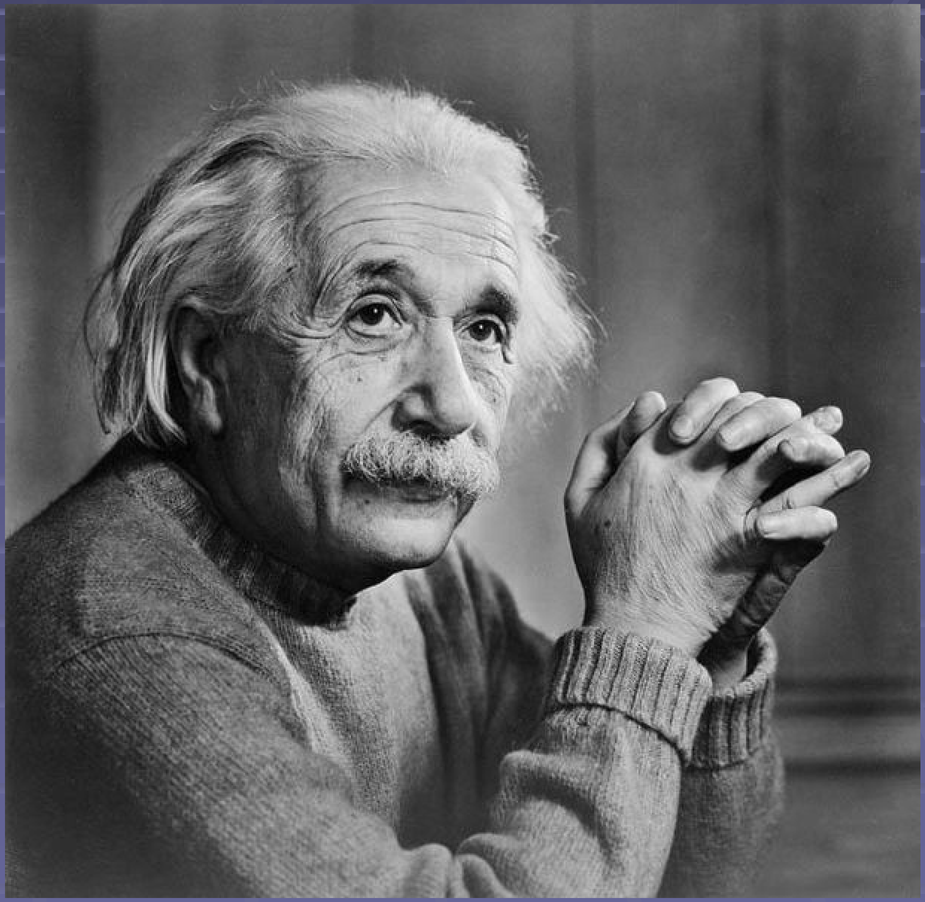


１章
特殊相対性理論とローレンツ変換

- 一般相対論に入る前に、その基礎になる特殊相対論の解説をする。アインシュタインが、１９０５年に書いた論文の範囲だが、慣性系における相対論として首尾一貫している。「時間の遅れ」や「ローレンツ収縮」といった古典力学（ニュートン力学）では説明できない現象を例に解説する。

Ａ･アインシュタイン（１８７９－１９５５）

- **Albert Einstein**、ドイツ出身の理論物理学者。光量子仮説に基づく光電効果の理論的解明によって1921年のノーベル物理学賞を受賞。
- 1905年に特殊相対性理論を発表。（２６歳）



相対的と絶対的

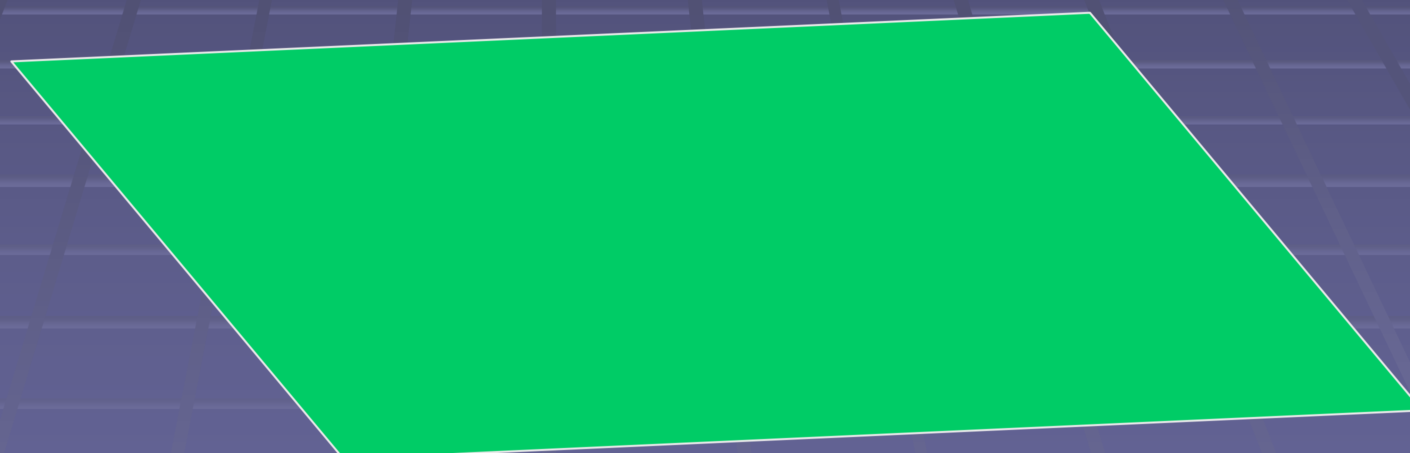
- 大きいと小さい
- 距離が長い、短い
- 時間が永い短い

零次元＝線

- 点が動くと、線になる。

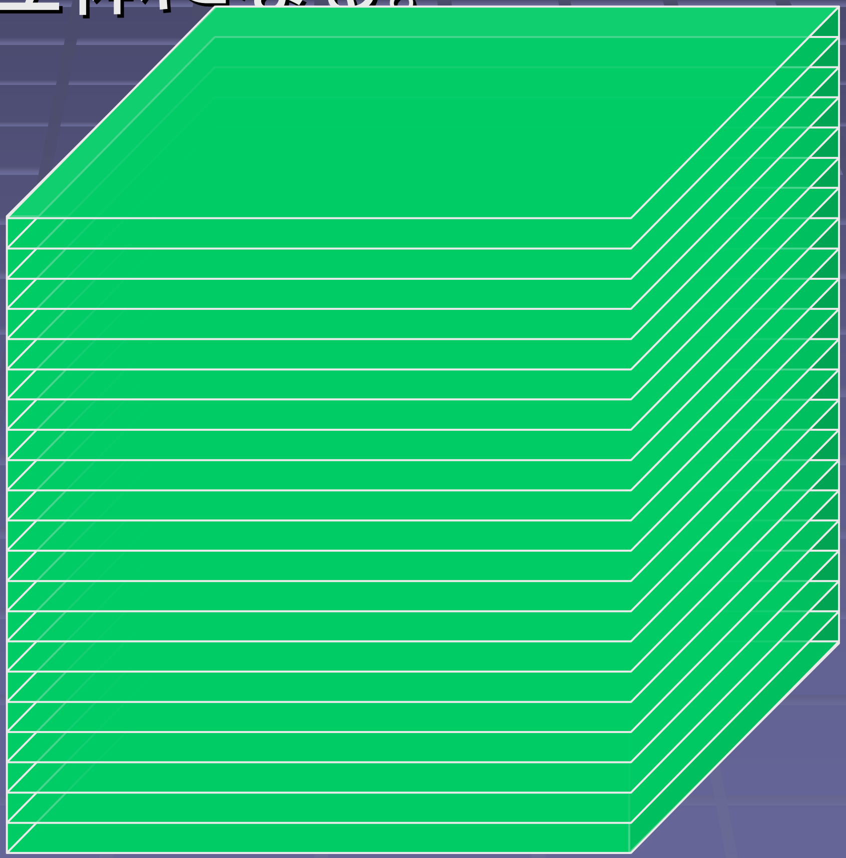
2次元＝面

- 線が動くと、面になる。



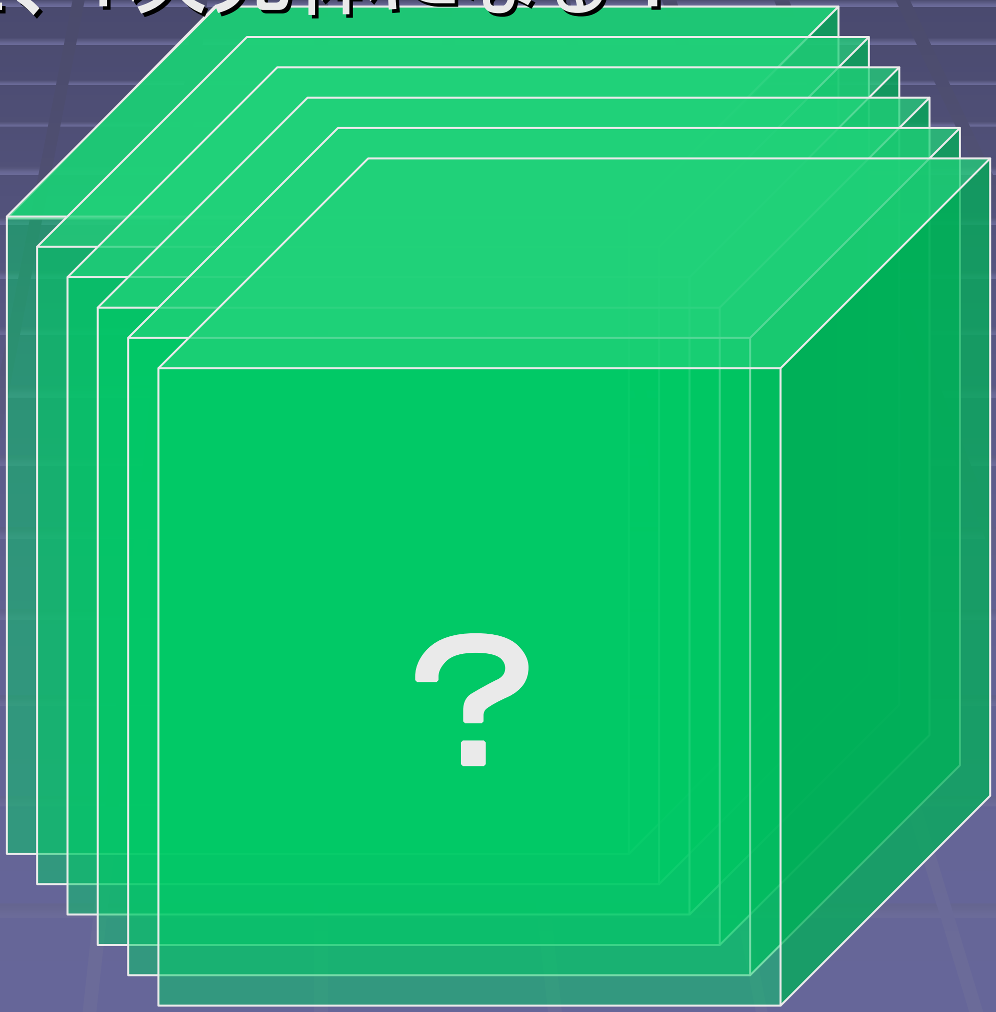
３次元＝立体

- 面が動くと、立体になる。



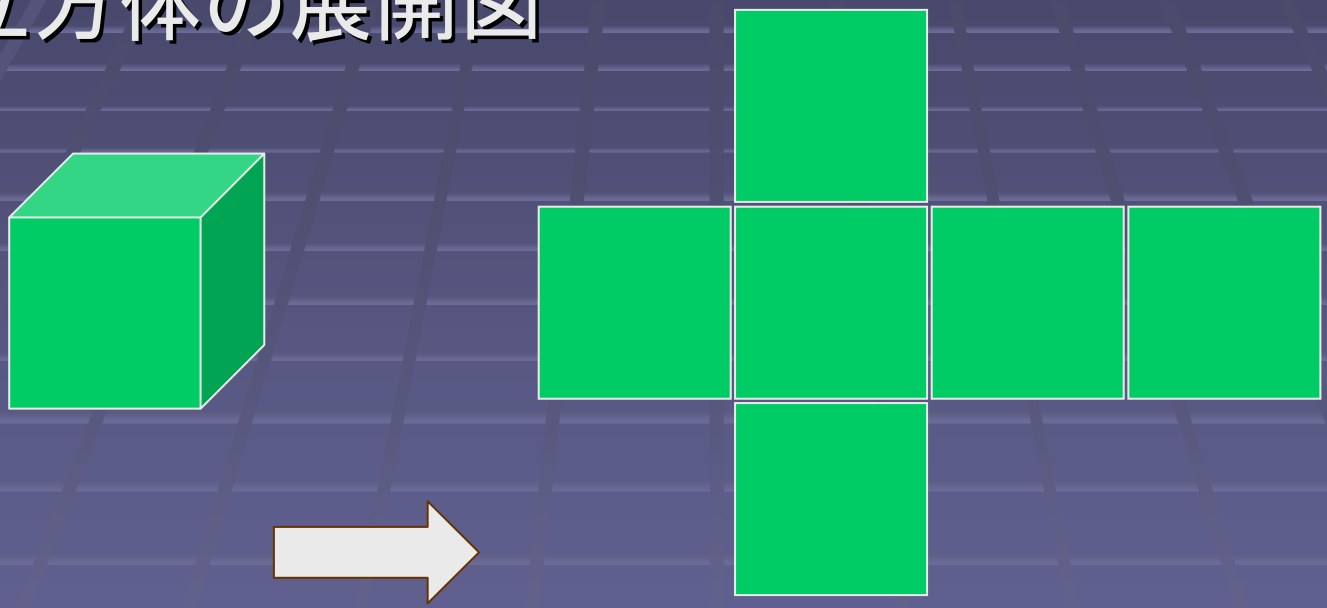
４次元体？

- 立体が動くと、４次元体になる？



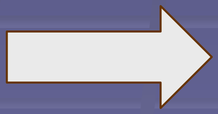
展開図

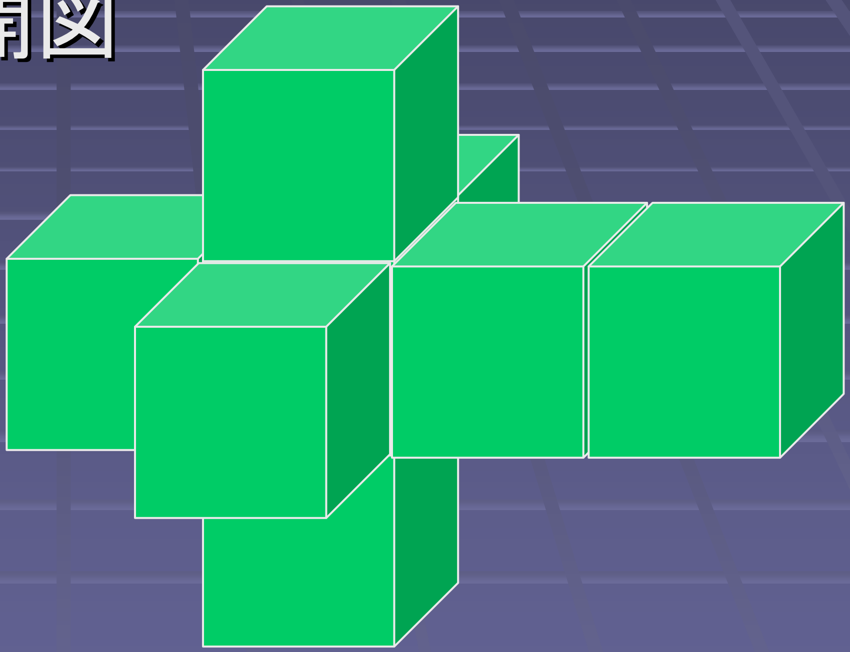
- 立方体の展開図



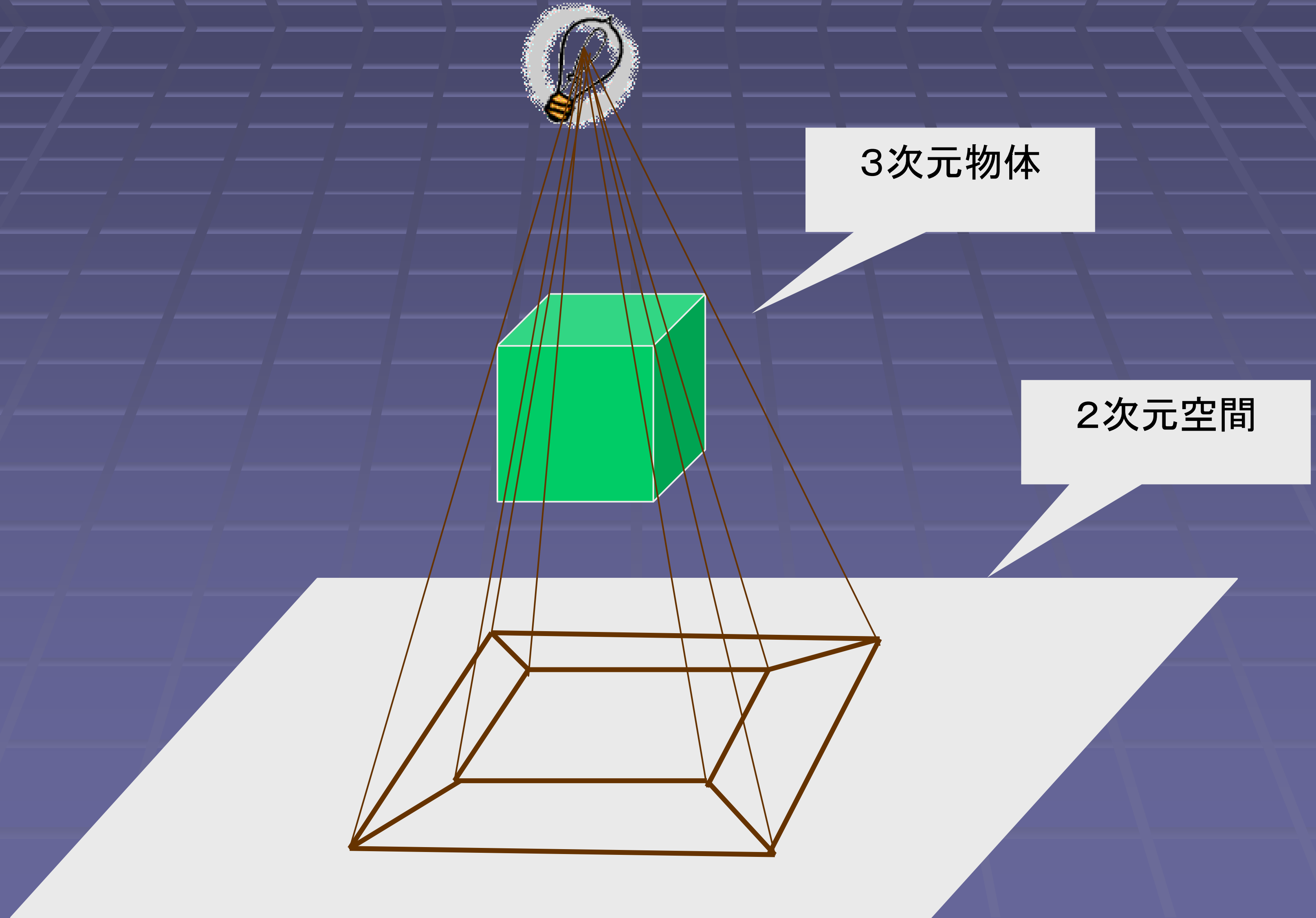
展開図

- ４次元立方体の展開図

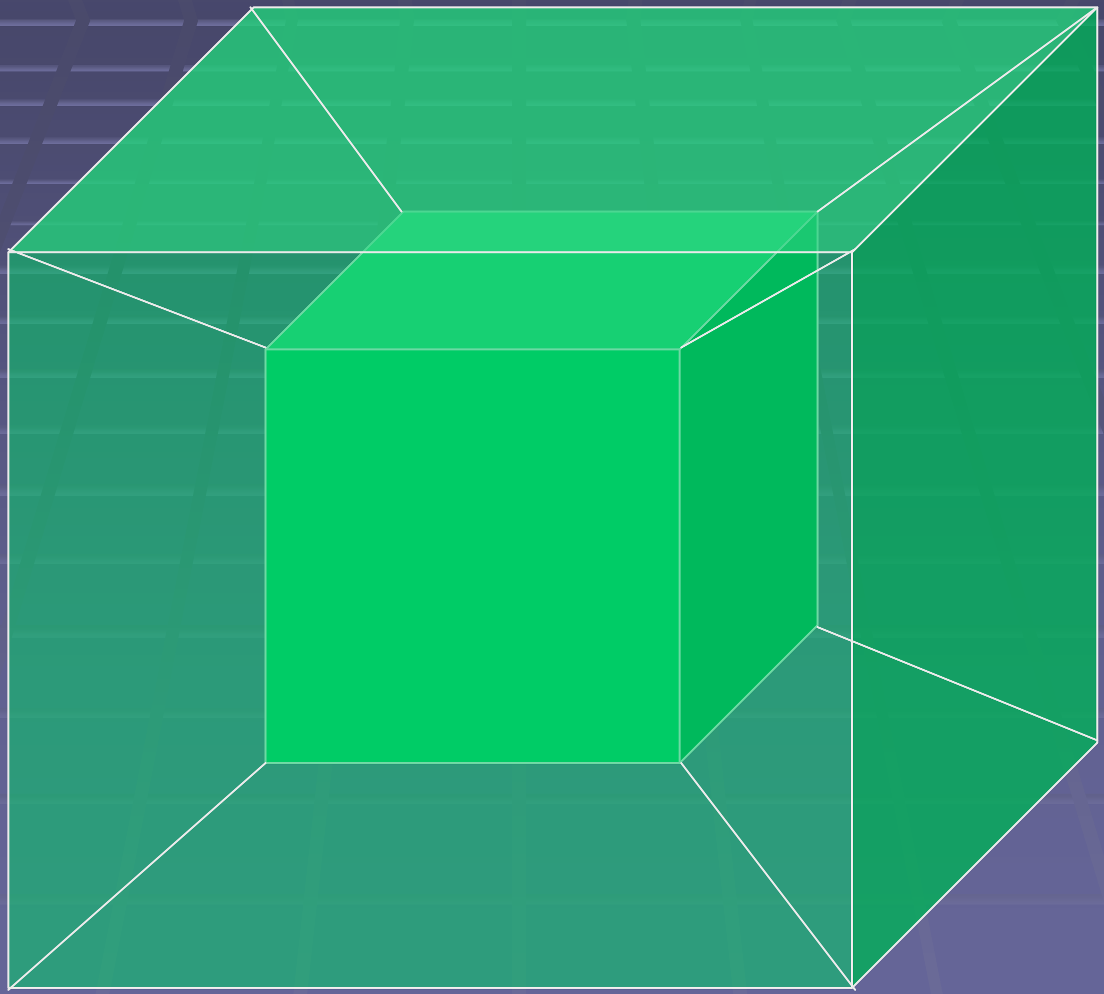




投影



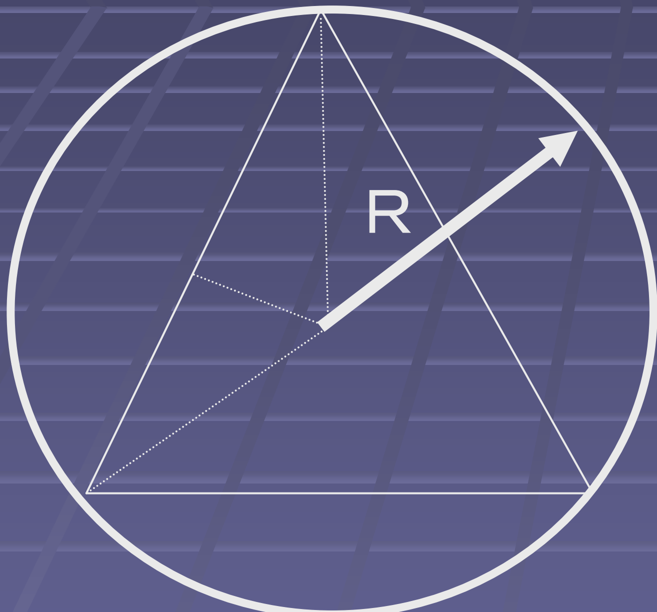
４次元から３次元へ投影



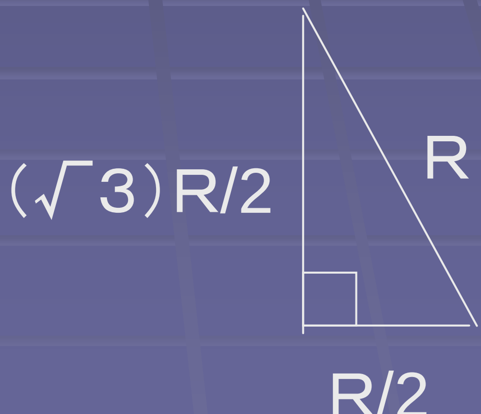
円

- 半径Rの円周の長さは2πR
- 半径Rの円の面積は、πR^2

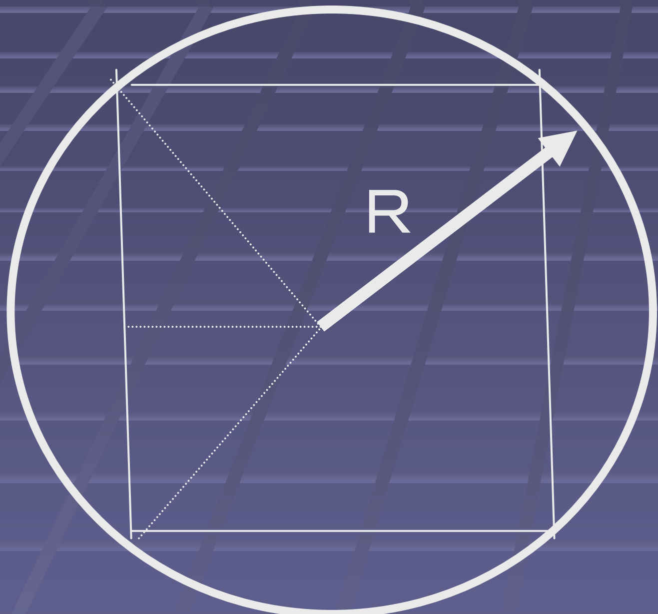
円



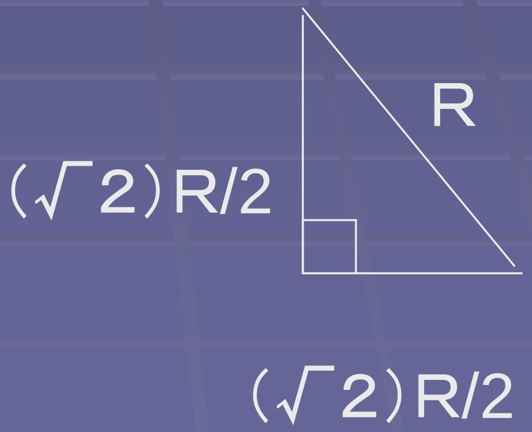
3角形の面積＝
$6 \times (\sqrt{3}/8)R^2$



円

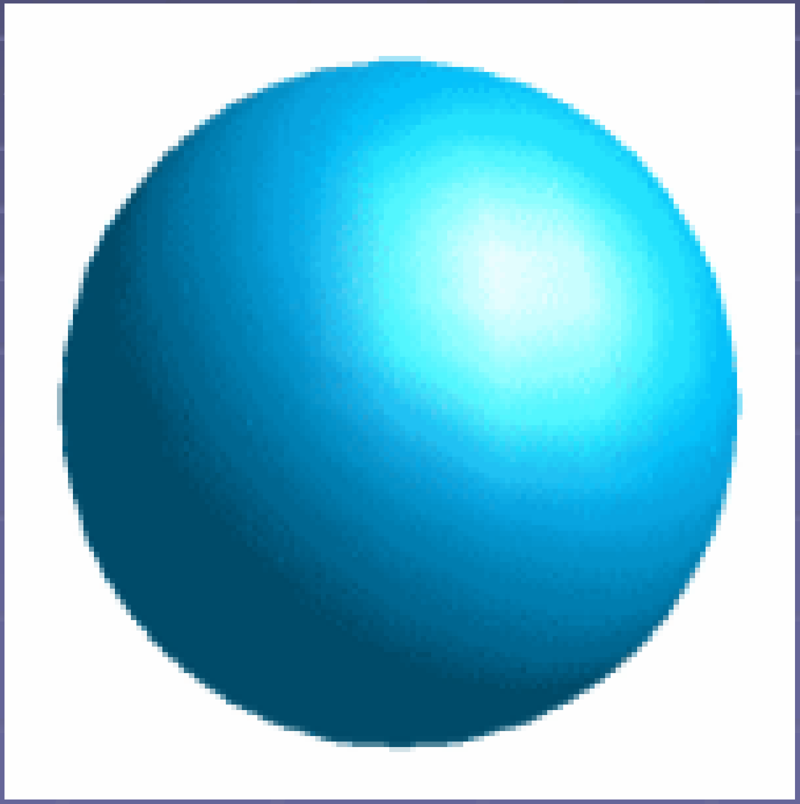


4角形の面積＝
8×（2/8)R^2



球

- 半径Rの球の表面積4πR^2
- 半径Rの球の体積4πR^3/3



４次元球

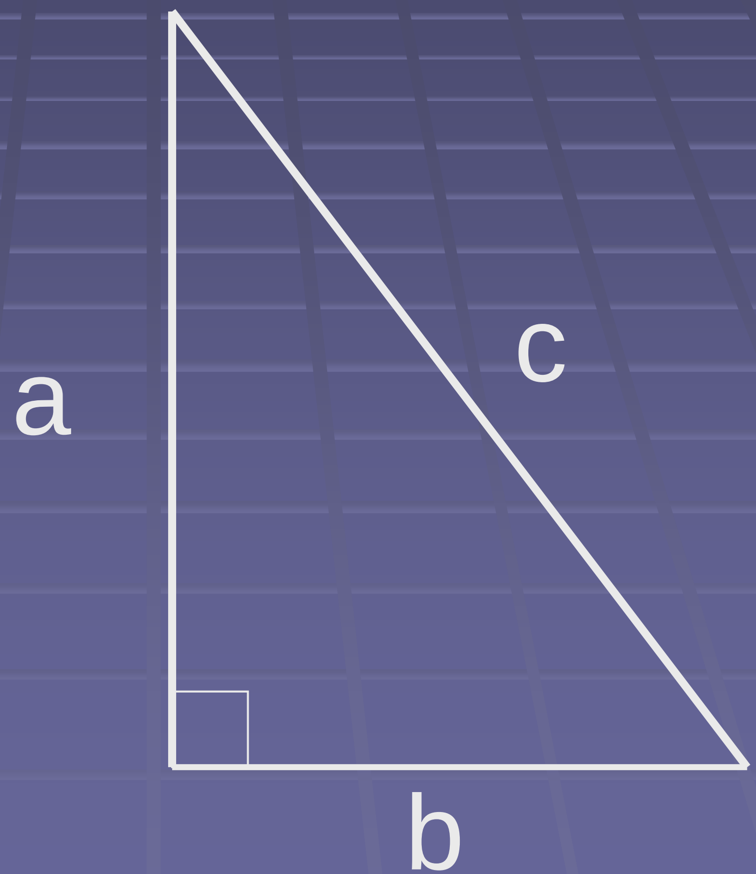
- 半径Rの表面体積$2\pi^2R^3$
- 半径Rの４次元体積$\pi^2R^4/2$

5次元球・・・

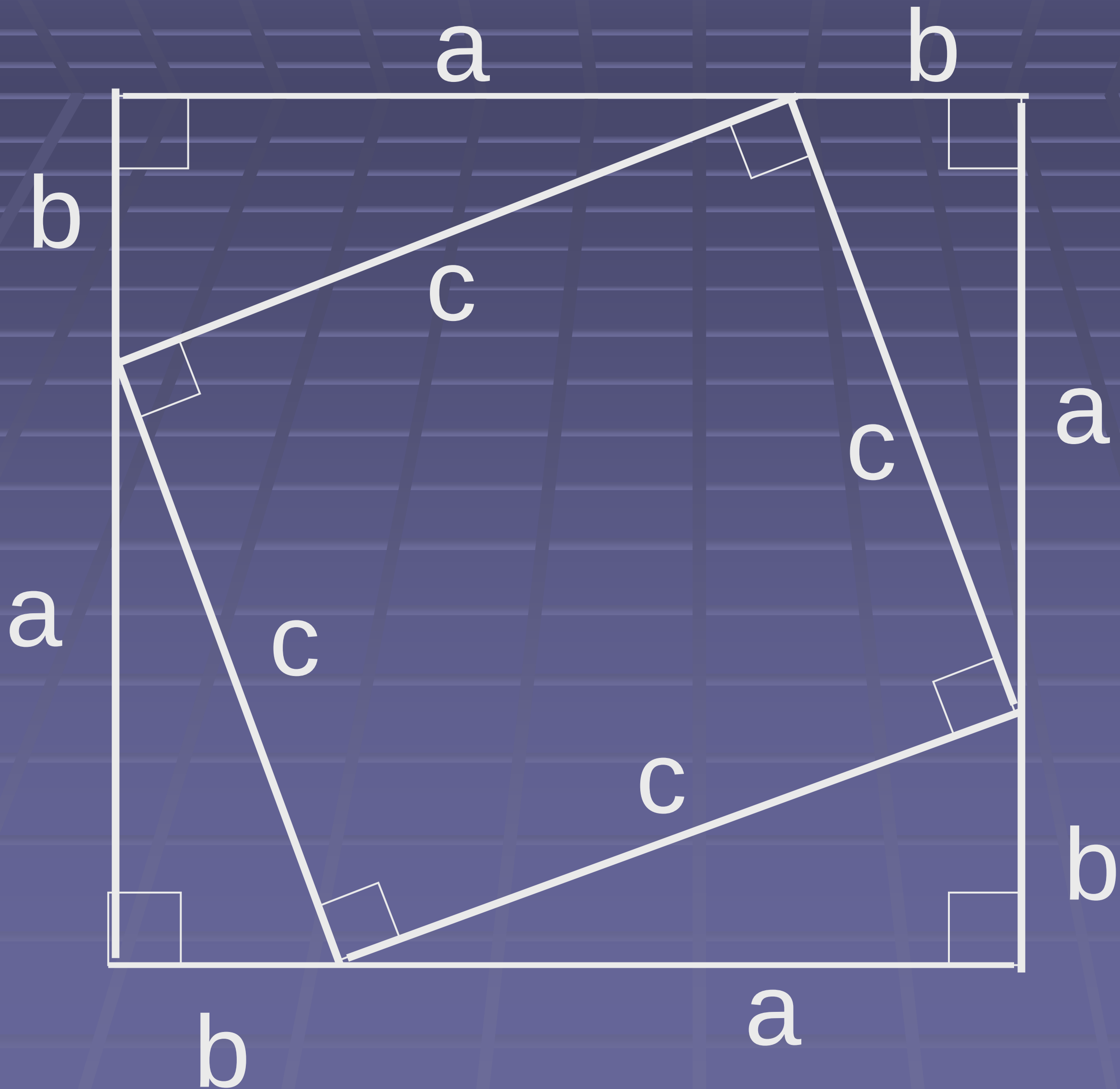
- ５次元球の５次元体積８$\pi^2R^5/15$
- ６次元球の６次元体積$\pi^3R^6/6$
- ７次元球の７次元体積１６$\pi^3R^7/105$
- ８次元球の８次元体積$\pi^4R^8/24$

ピタゴラスの定理

- 3平方の定理
- $a^2+b^2=c^2$



ピタゴラスの定理の証明



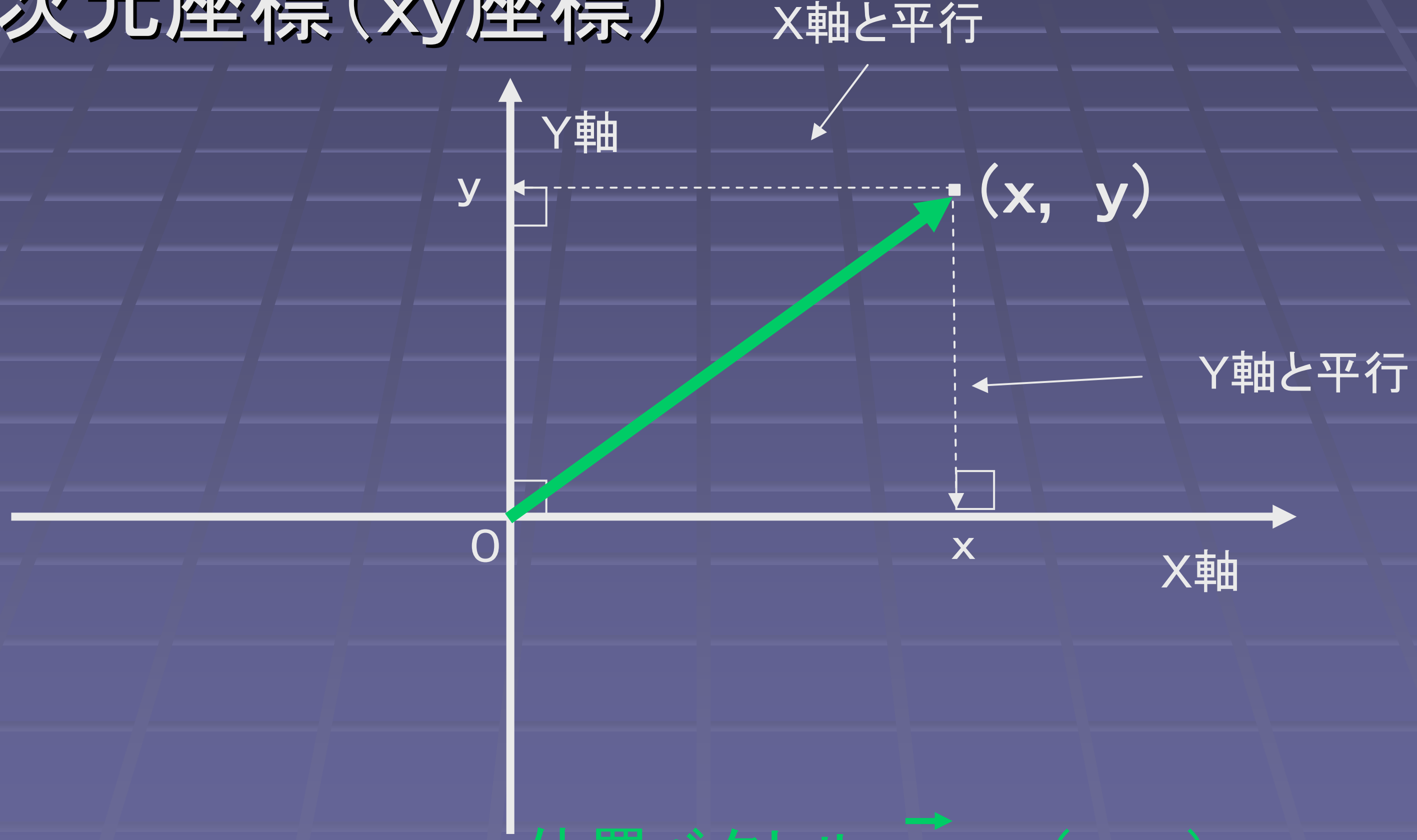
$S=(a+b)^2=$
a^2+b^2+2ab

$S'=$
$c^2+4\times(ab/2)$
$=c^2+2ab$

$S=S'$

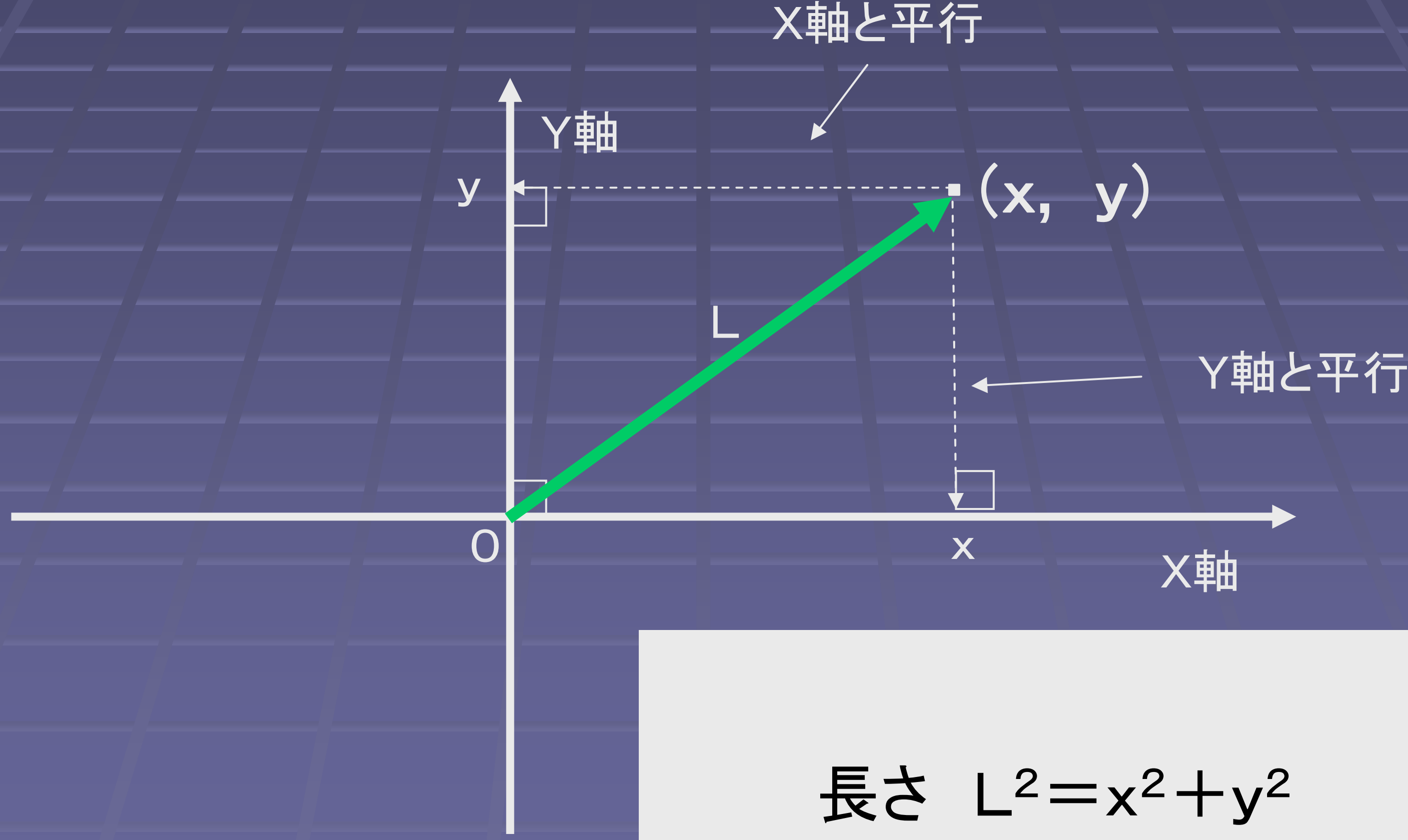
座標

- ２次元座標（xy座標）



位置ベクトル $\vec{r}$ ＝（x, y）

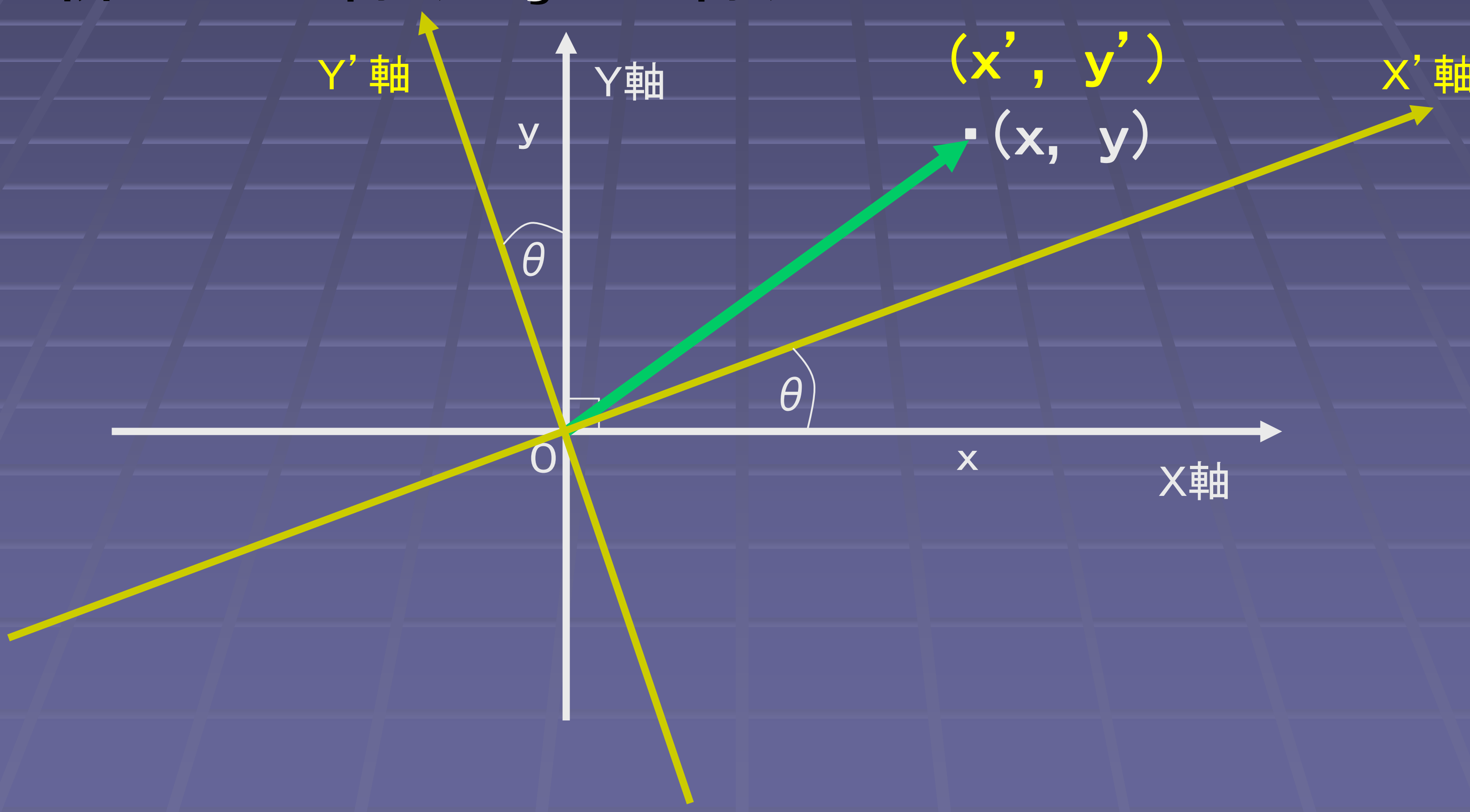
長さ（ピタゴラスの定理）



長さ　$L^2 = x^2 + y^2$

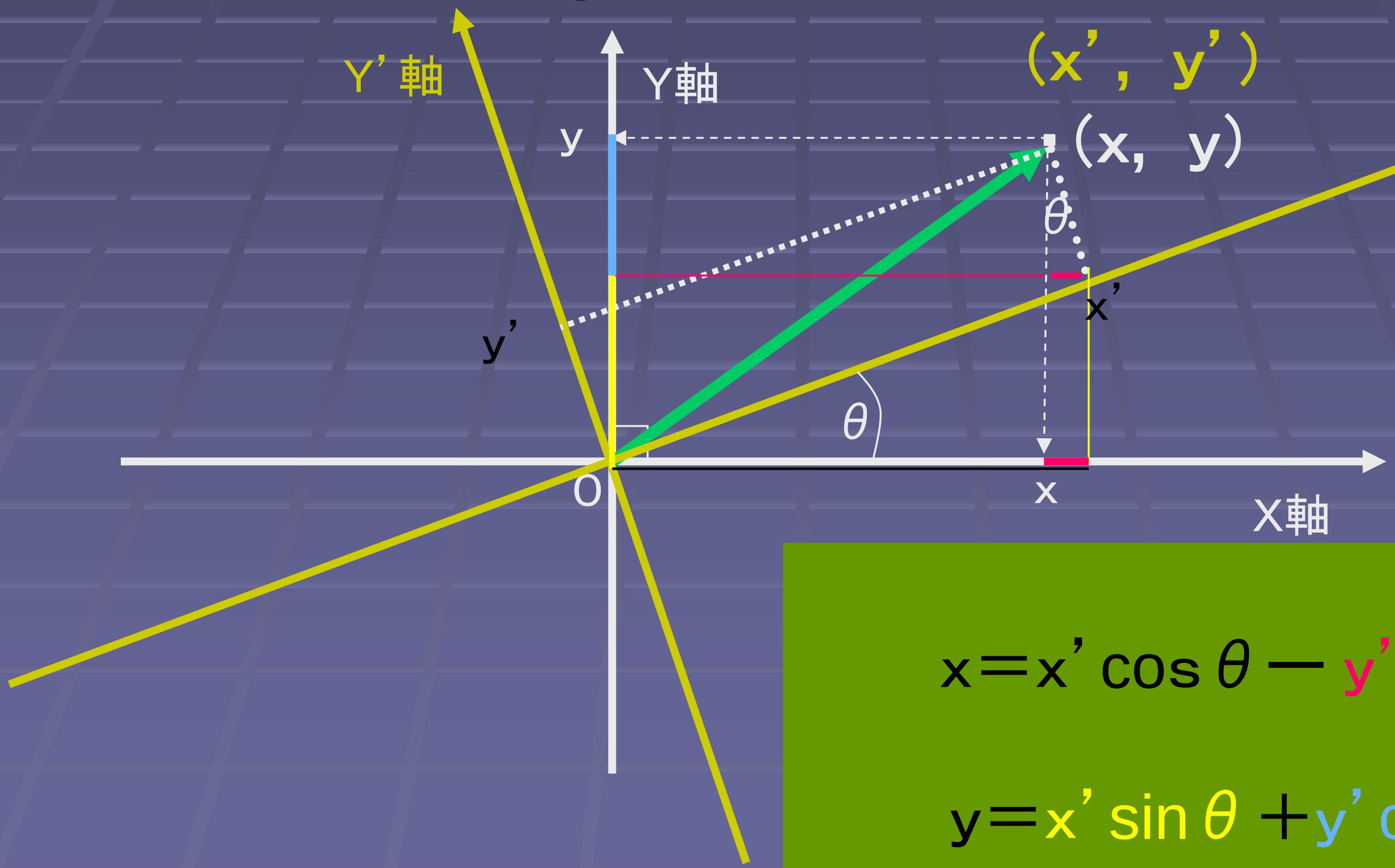
回転座標

- 新しい座標（x’y’ 座標）



回転座標

- 新しい座標（x’y’座標）



$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

行列で表現する

x＝x’cosθ－y’sinθ

y＝x’sinθ＋y’cosθ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

不変な長さ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

- $L^2 = x^2 + y^2$

$= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$

$= x'^2\cos^2\theta + y'^2\sin^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta$

$+ x'^2\sin^2\theta + y'^2\cos^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta$

$= (x'^2 + y'^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= x'^2 + y'^2 = L'^2$

L＝L’ → 回転しても長さは変わらない

光より早く見る（？）

- 物が見えるのは、物から反射して出ている光が目に入り、眼底の視神経を刺激する。
- 物と目の距離をL〔m〕としたら、物の起きている現象（事象）は、L／c〔秒〕後に見ることができる。（cは、光の速さ）
- 物に対して、v〔m/s〕の速さで近づくと、どうなる？

L/(v+c)秒後?

- 物までの距離L、光と目が接する時点での時間をtとすれば、ct＋vt=L。よって、

 t＝L/(v+c)秒後。

- 実際近づいて見ると、

 t＝L/(v+c)にならないのだ！

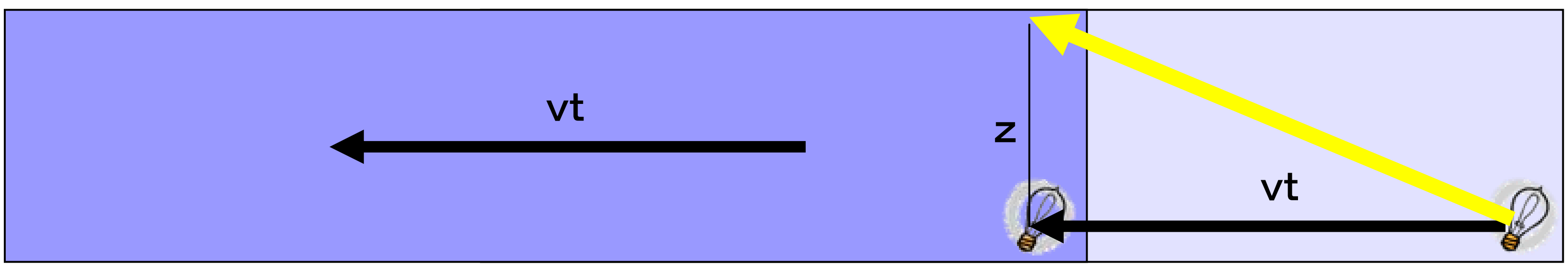
本当は・・・ $t=\dfrac{L}{v+c}\dfrac{1-\beta-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta=v/c$

？

電車の中と外

ソニック

■電車の中(S'系) $(c't')^2 = z^2$



■電車の外(S系) $(ct)^2 = z^2 + (vt)^2$

電車の中と外

- 電車の外（S系）　$(ct)^2 = z^2 + (vt)^2$
- 電車の中（S'系）$(c't')^2 = z^2$

- ~~時間が同じなら（~~$\cancel{t = t'}$~~）→~~ $\cancel{c' = \sqrt{c^2 - v^2}}$
- 光の速さは変わらない！！！→　$c' = c$

  $z^2 = c^2 t'^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2 = t^2 (c^2 - v^2)$

- 従って・・・・　$t' = t\sqrt{1 - \beta^2}$　　$\beta = v/c$

ローレンツ変換

- 電車の中（S’系：x’、y’、z’、t’）
- 電車の外（S　系：x、y、z、t）

電車の進む方向をx方向に仮定すると、

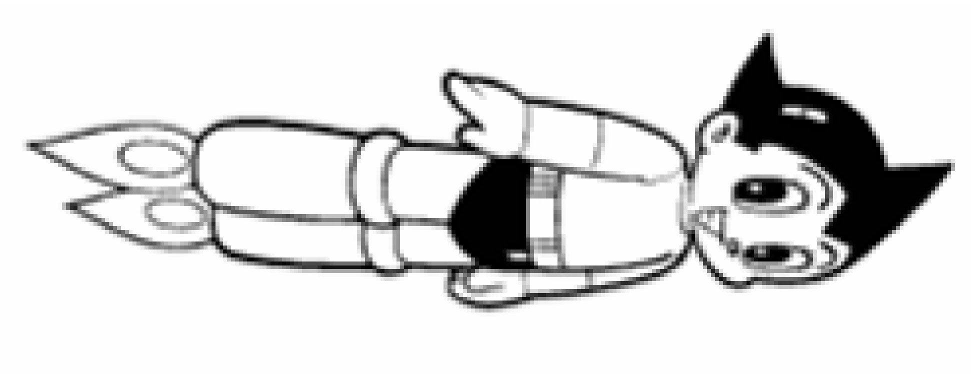
$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

となる。

ローレンツ収縮

- vの速さで走っているものは進む方向に縮む。
- $$L' = ct' = ct\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2} = L_0\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}$$

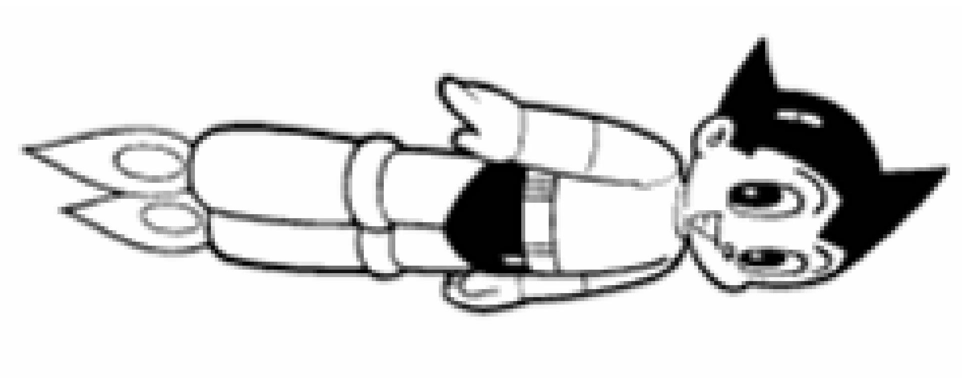
速度Ｖ＝０m/秒



http://www.asahi.com/ad/clients/atom/tezuka_episode.html

速度V＝300km/時

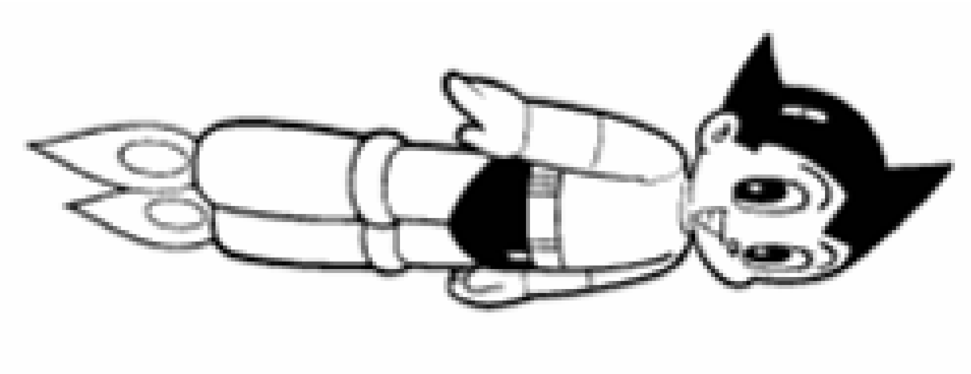
v/c=2.7×10^{-7}



http://www.asahi.com/ad/clients/atom/tezuka_episode.html

速度V＝300，000km/時間

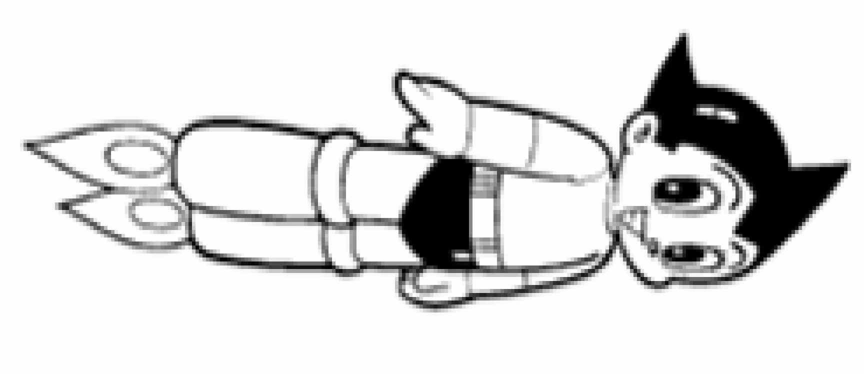
$v/c=2.7\times 10^{-4}$



http://www.asahi.com/ad/clients/atom/tezuka_episode.html

速度Ｖ＝３００，０００，０００km/時間

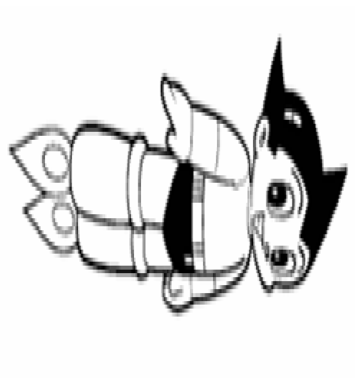
$v/c=2.7\times10^{-1}$



http://www.asahi.com/ad/clients/atom/tezuka_episode.html

速度V＝1000，000，000km/時間

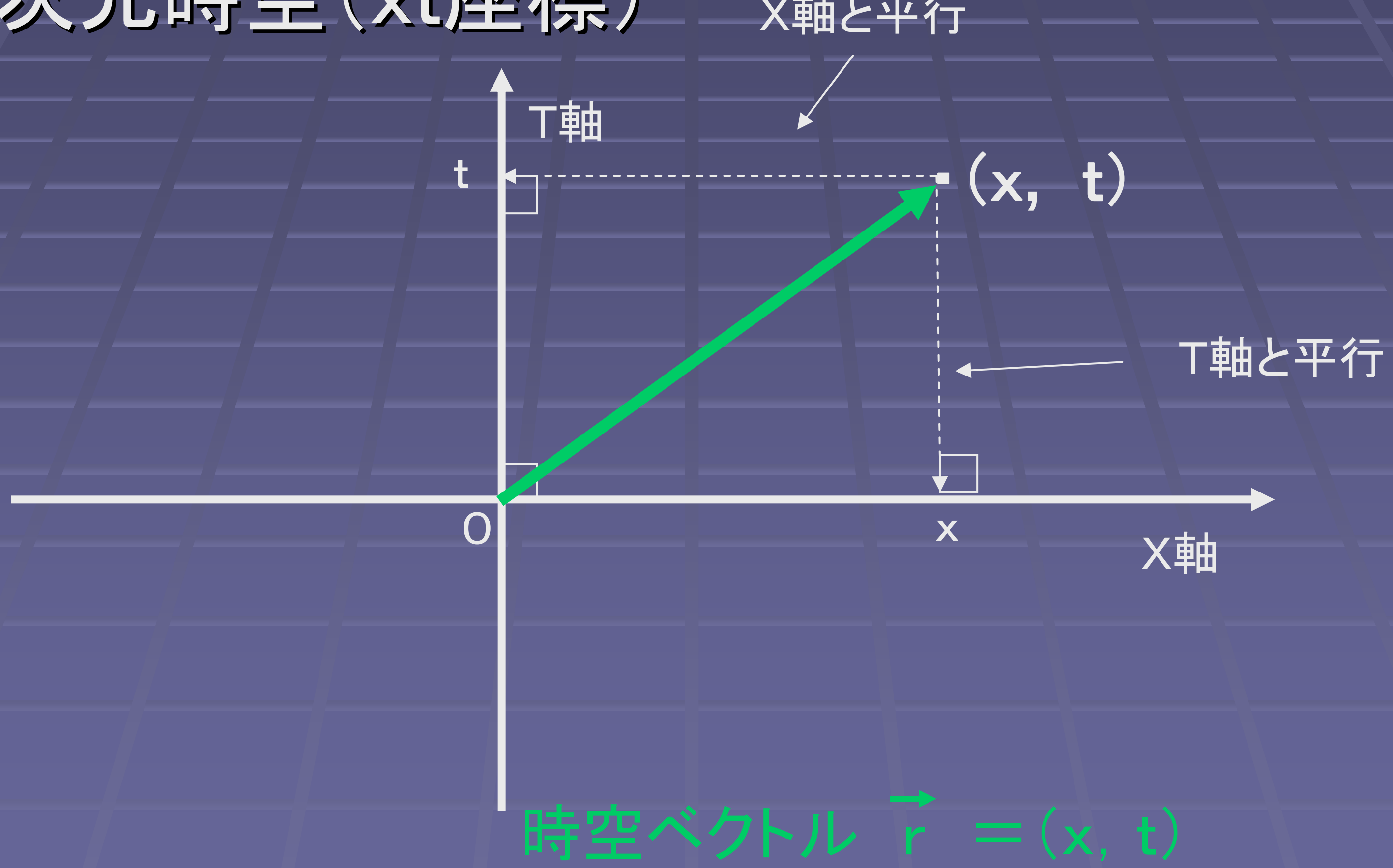
v/c=0．93



http://www.asahi.com/ad/clients/atom/tezuka_episode.html

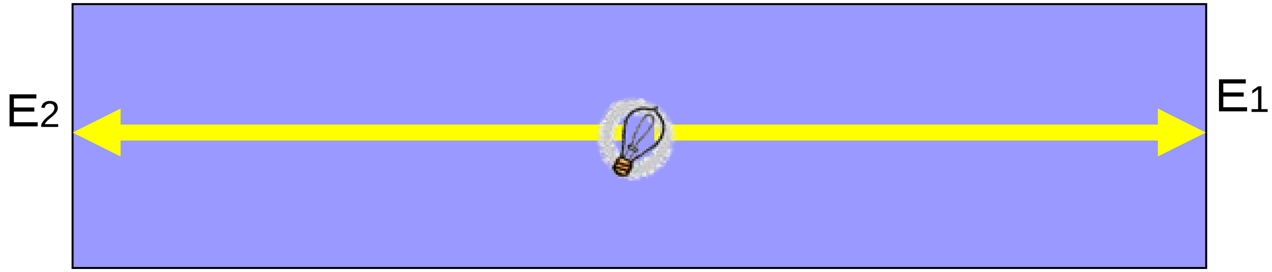
時空間(ミンコフスキー時空)

- ２次元時空(xt座標)

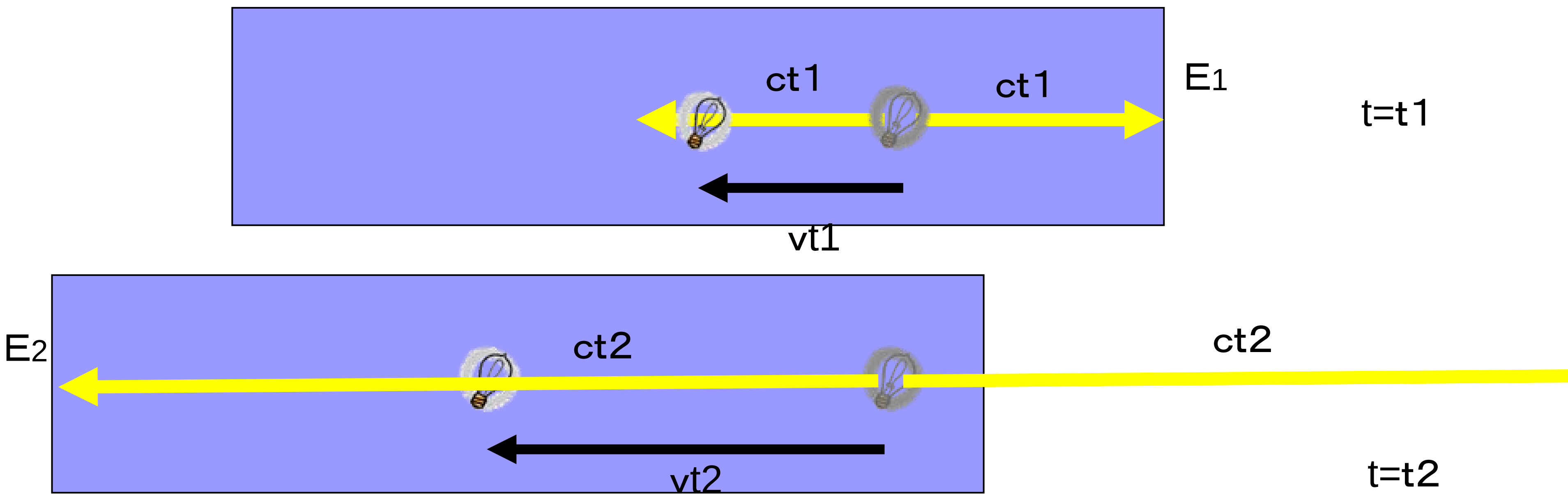


ヘルマン·ミンコフスキー

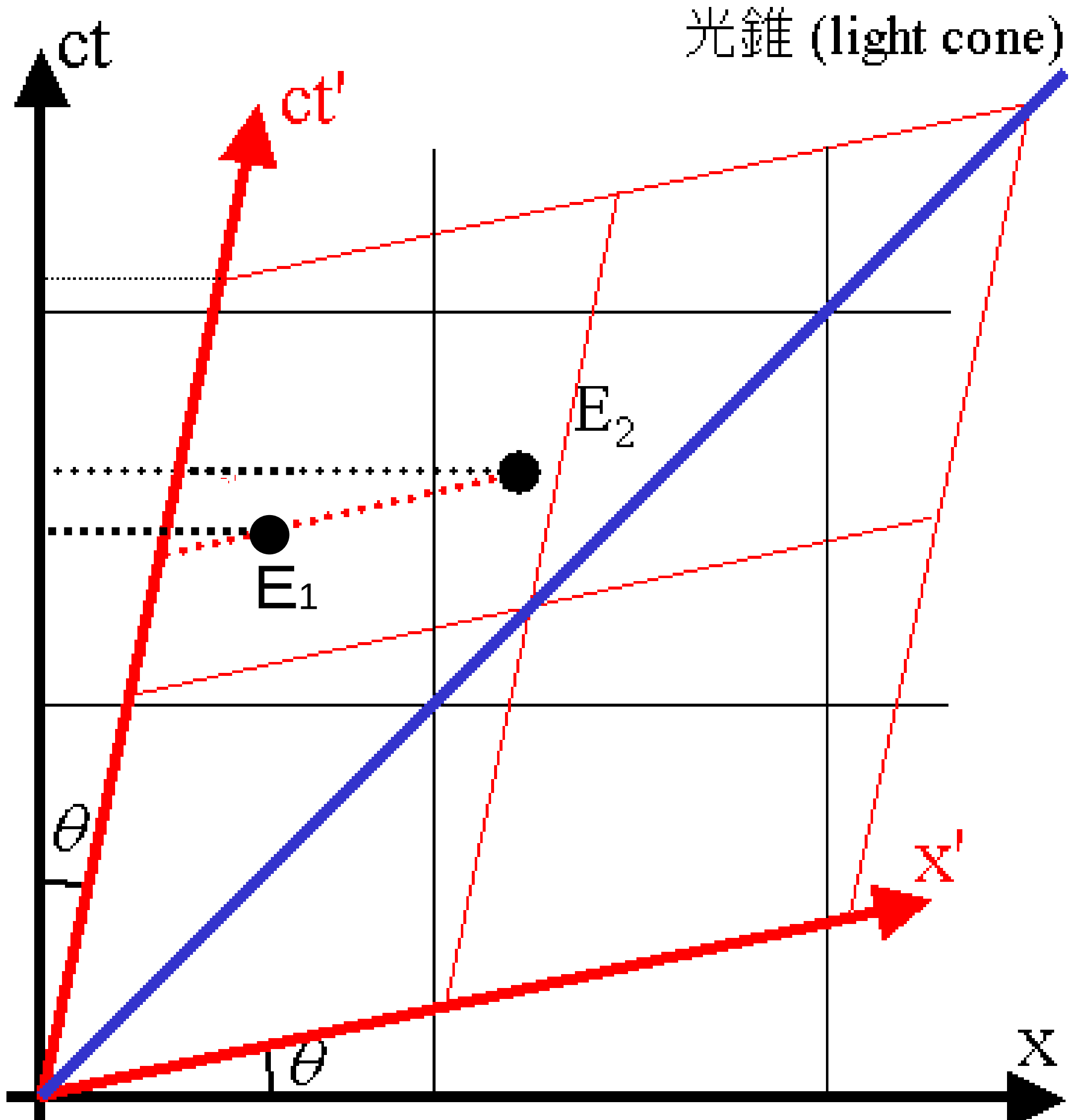
（**Hermann Minkowski)**
1864年-1909年
ロシア（リトアニア）生まれのユダヤ系ドイツ人数学者。ミンコフスキー空間と呼ばれる四次元の空間により、アインシュタインの相対性理論に数学的基礎を与えた。また、時空を表すための方法として光円錐を考えた。その他に数論や幾何学に関する業績がある。



■電車の中（S’系）　同時？



■電車の外（S系）　t1≠t2



$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$$

時空間の回転は可能か？

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-i\ v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-i}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-i\ v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{iv/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-i\ v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{iv/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ を $\cos\theta$、$\frac{iv/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ を $\sin\theta$ と仮定すれば、

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)^2 + \left(i\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)^2 = 1$$

となる。ただし、sin 関数は、虚数になるから、不合理。

時空間の長さ(固有時)

$$\begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix}$$

- $\lambda^2 = x^2 + (ict)^2 = x^2 - c^2t^2$

  $= (x'\cos\theta - ict'\sin\theta)^2 + (x'\sin\theta + ict'\cos\theta)^2$

  $= x'^2\cos^2\theta + (ict')^2\sin^2\theta - 2x'ict'\cos\theta\sin\theta$

  $+ x'^2\sin^2\theta + (ict')^2\cos^2\theta + 2x'ict'\cos\theta\sin\theta$

  $= (x'^2 + (ict')^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

  $= x'^2 + (ict')^2 = x'^2 - c^2t'^2 = \lambda'^2 \equiv -c^2\tau^2$ ： 固有時 τ

$\lambda = \lambda'$, $\tau = \tau' \rightarrow$ 変換しても固有時は変わらない

不変な長さ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- $L^2 = x^2 + y^2$

$= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$

$= x'^2\cos^2\theta + y'^2\sin^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta$

$+ x'^2\sin^2\theta + y'^2\cos^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta$

$= (x'^2 + y'^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= x'^2 + y'^2 = L'^2$

L＝L’　→　回転しても長さは変わらない

まとめ

- 特殊相対性理論は、

「光速度はどの慣性系でも一定の原理」によって導かれる。

- ２つの慣性系の間に「時間の遅れ」が生じる。
- ２つの慣性系の間に「ローレンツ収縮」が起こる。
- ミンコフスキー時空間によって記述される。

→時間と空間の関係は、複素数の実部虚部の関係に見ることができる。（一般相対論では、計量テンソルで説明する）

- 不変量として、「固有時τ」がある。
- （質量は、エネルギーと等価である。）