

3章 膨張する宇宙

—一般相対論の宇宙論への応用—

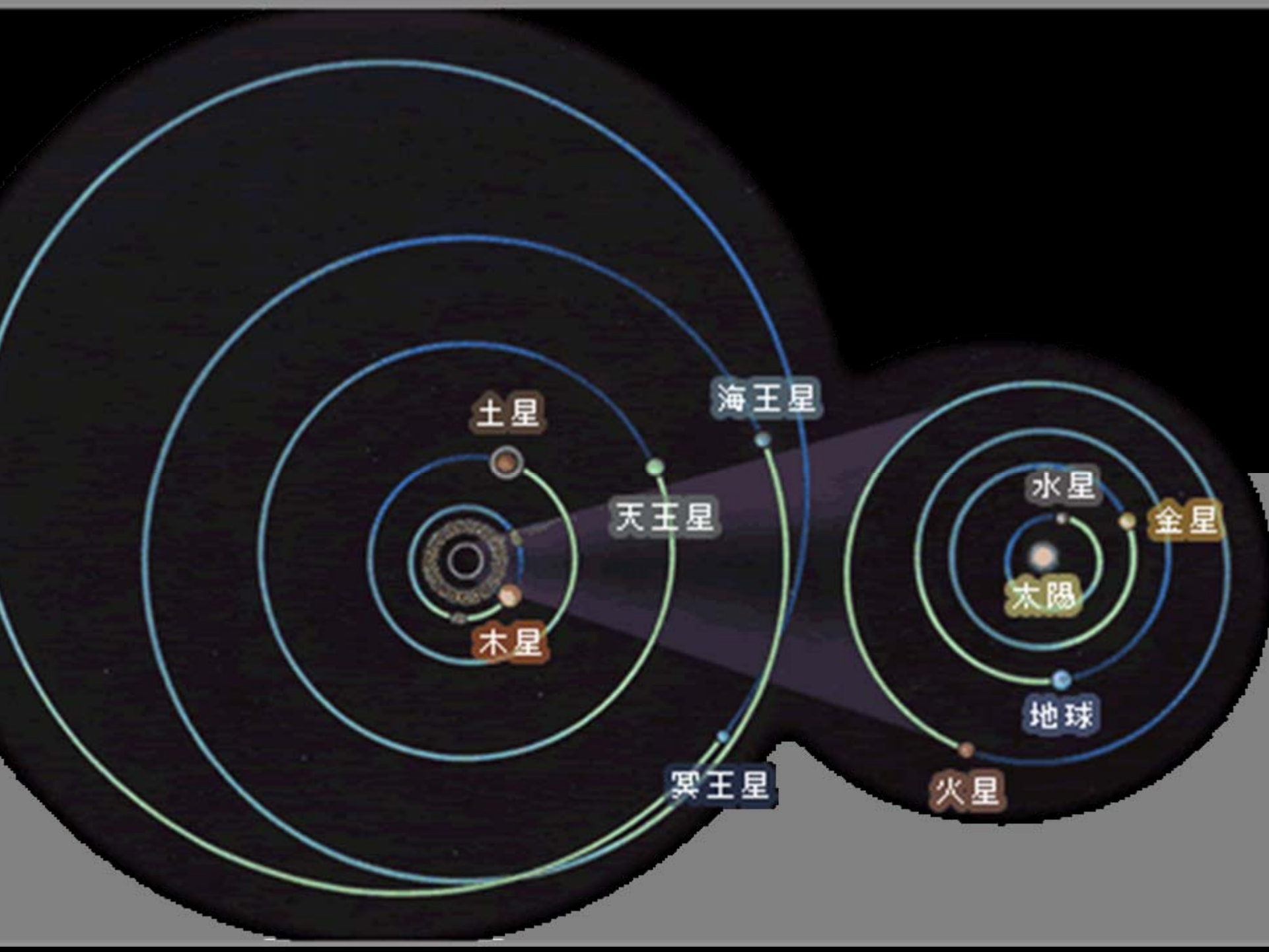
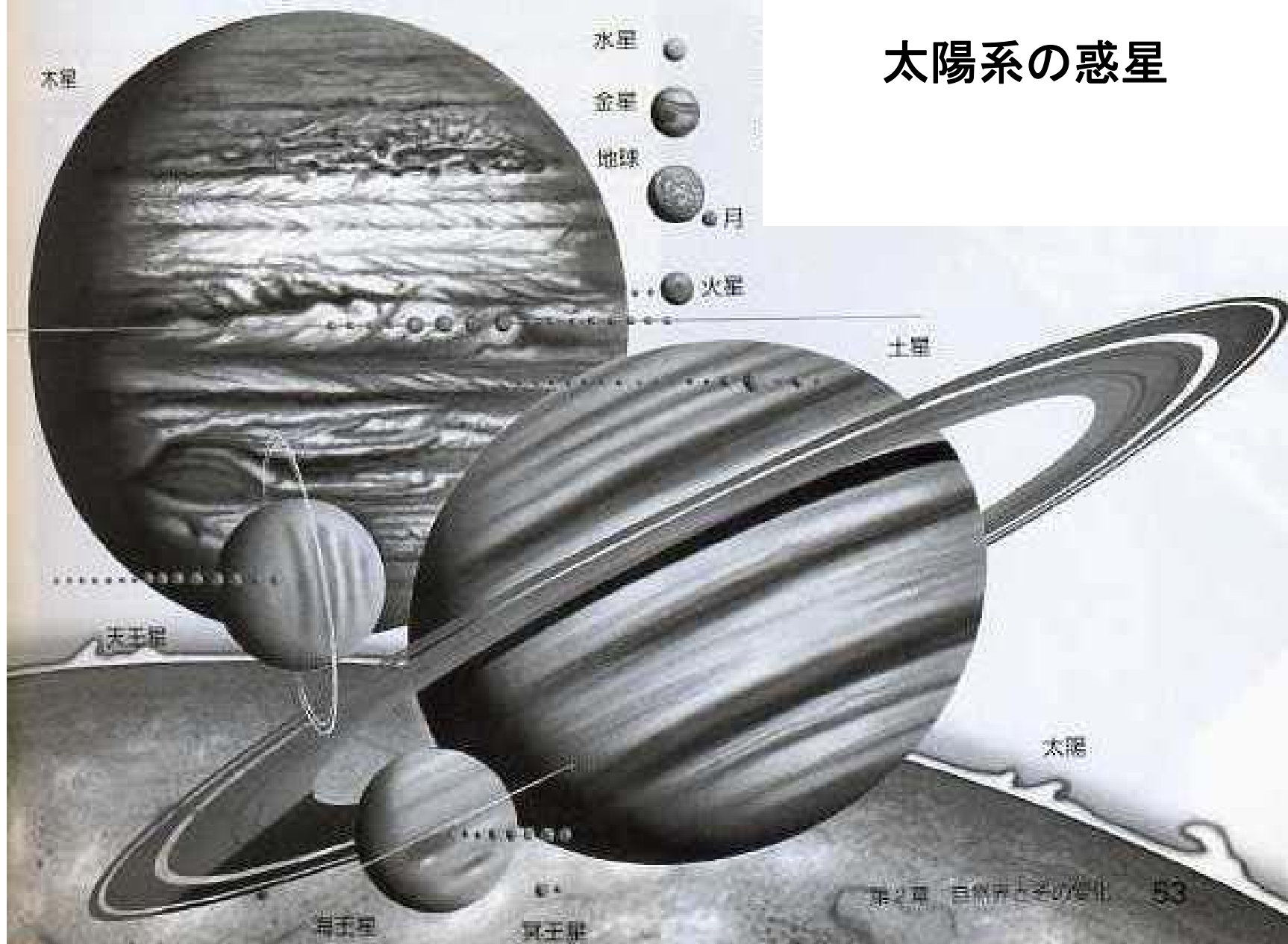
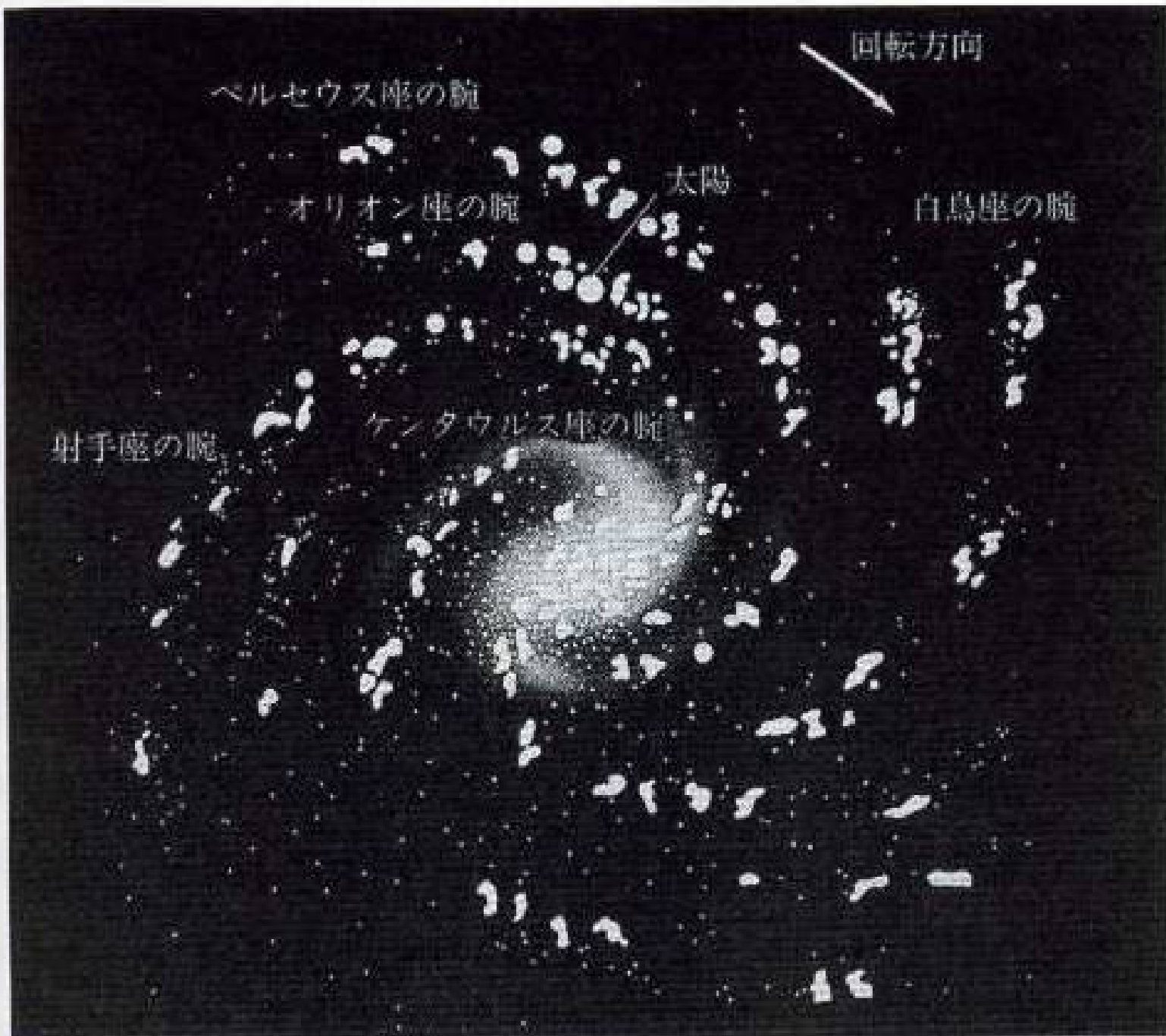
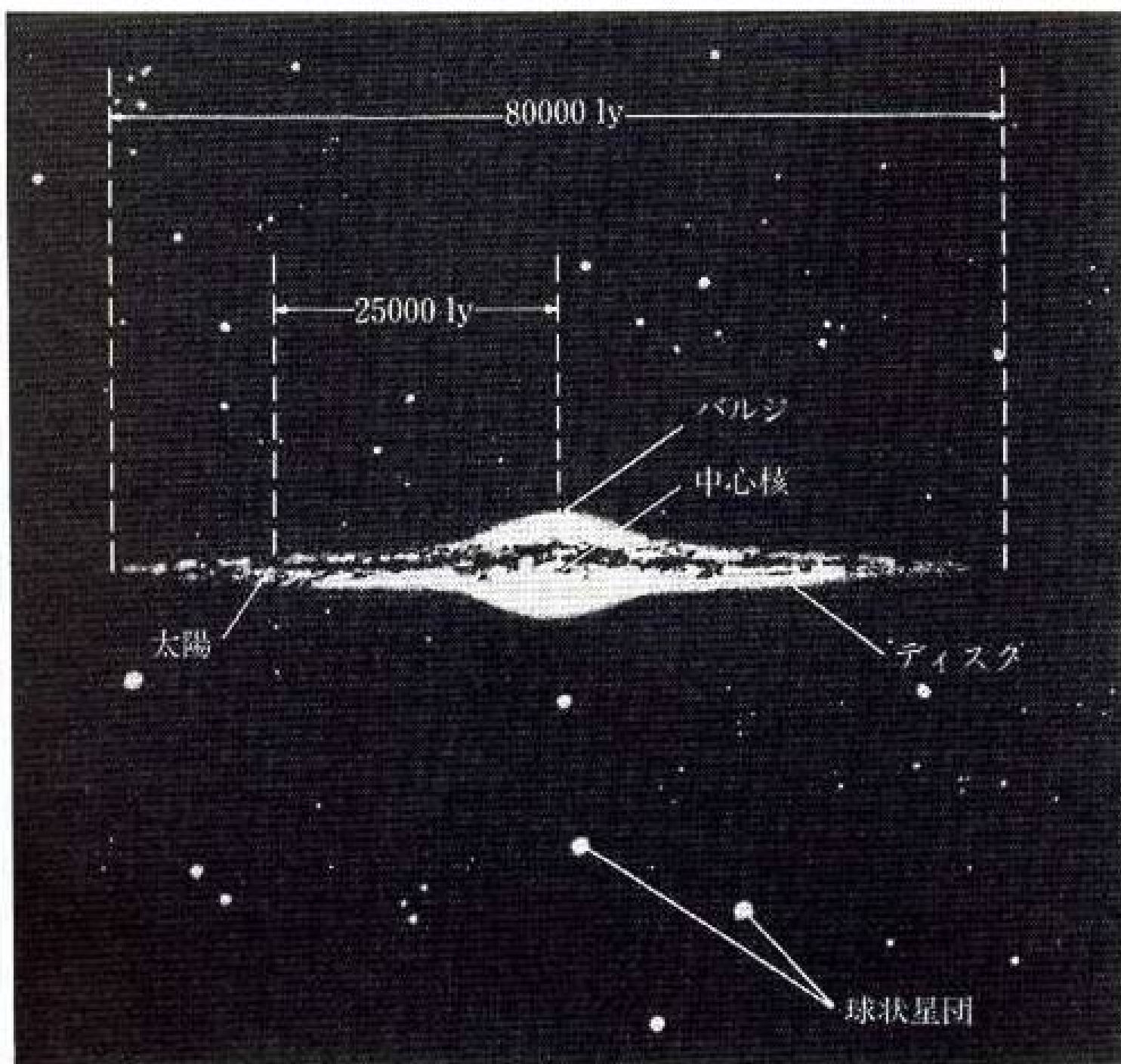


図9 太陽系の惑星



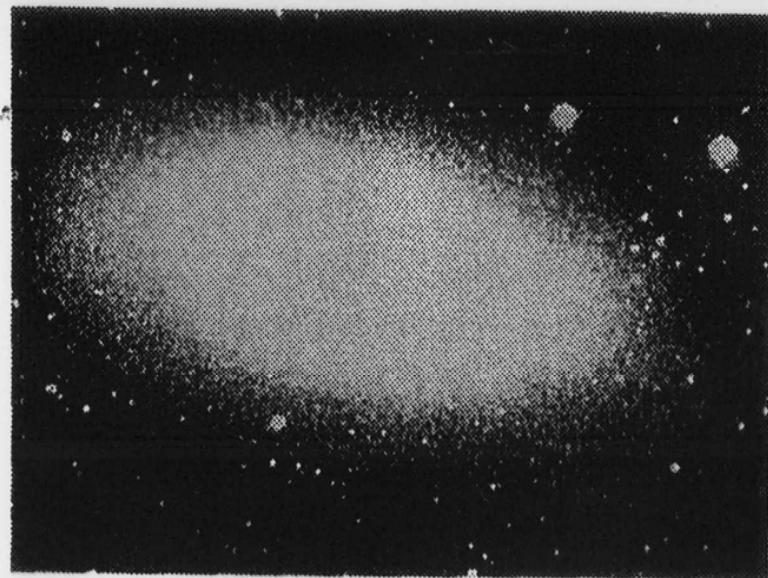
太陽系の惑星



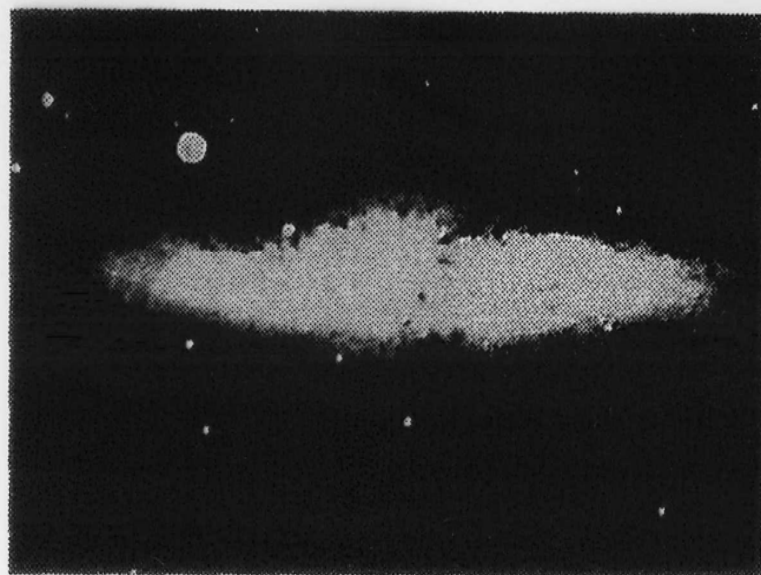




渦巻き銀河



楕円銀河



不規則銀河

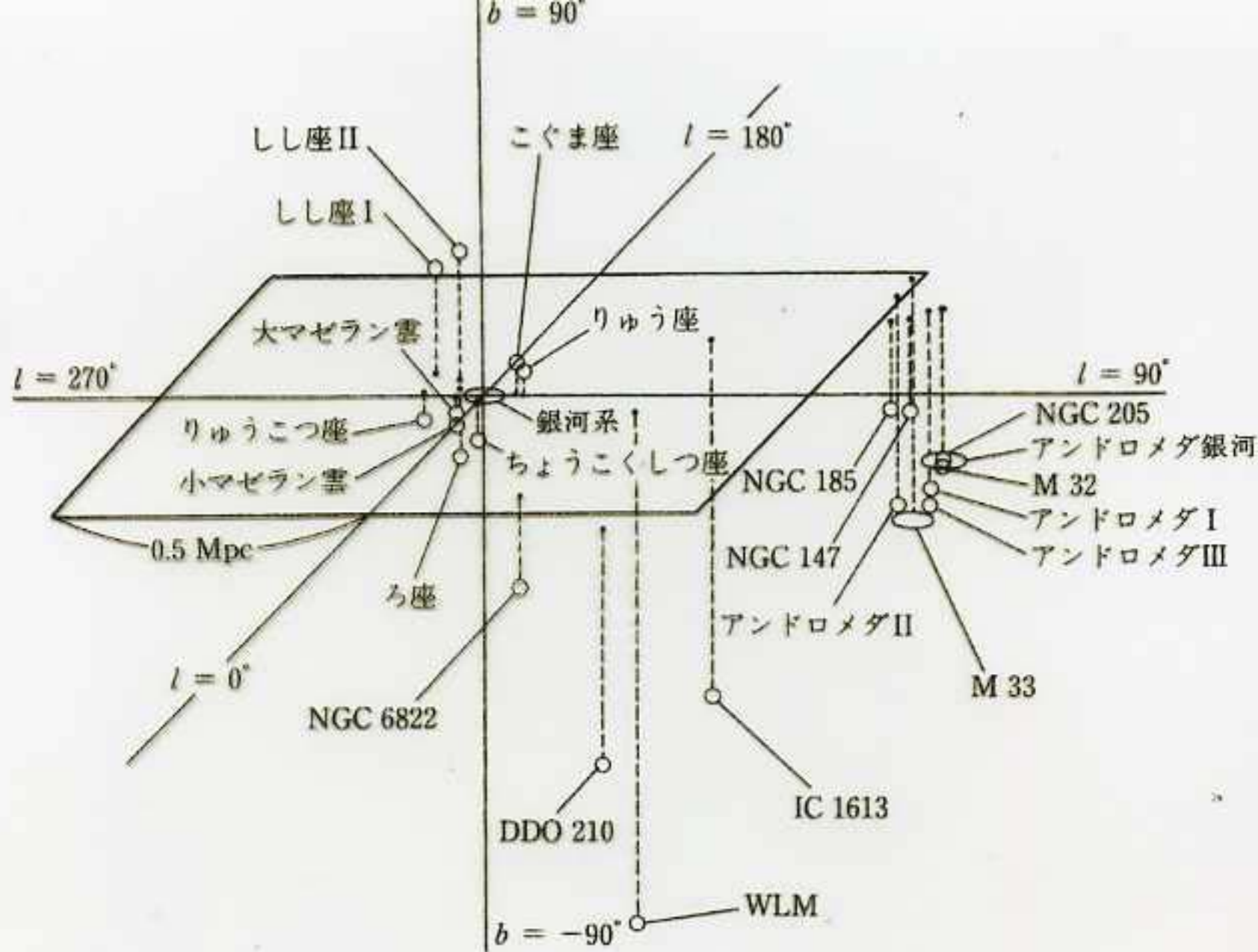


図1.8 局所銀河団
 [須藤靖, 宇宙の大構造, p. 14, 培風館(1992)]

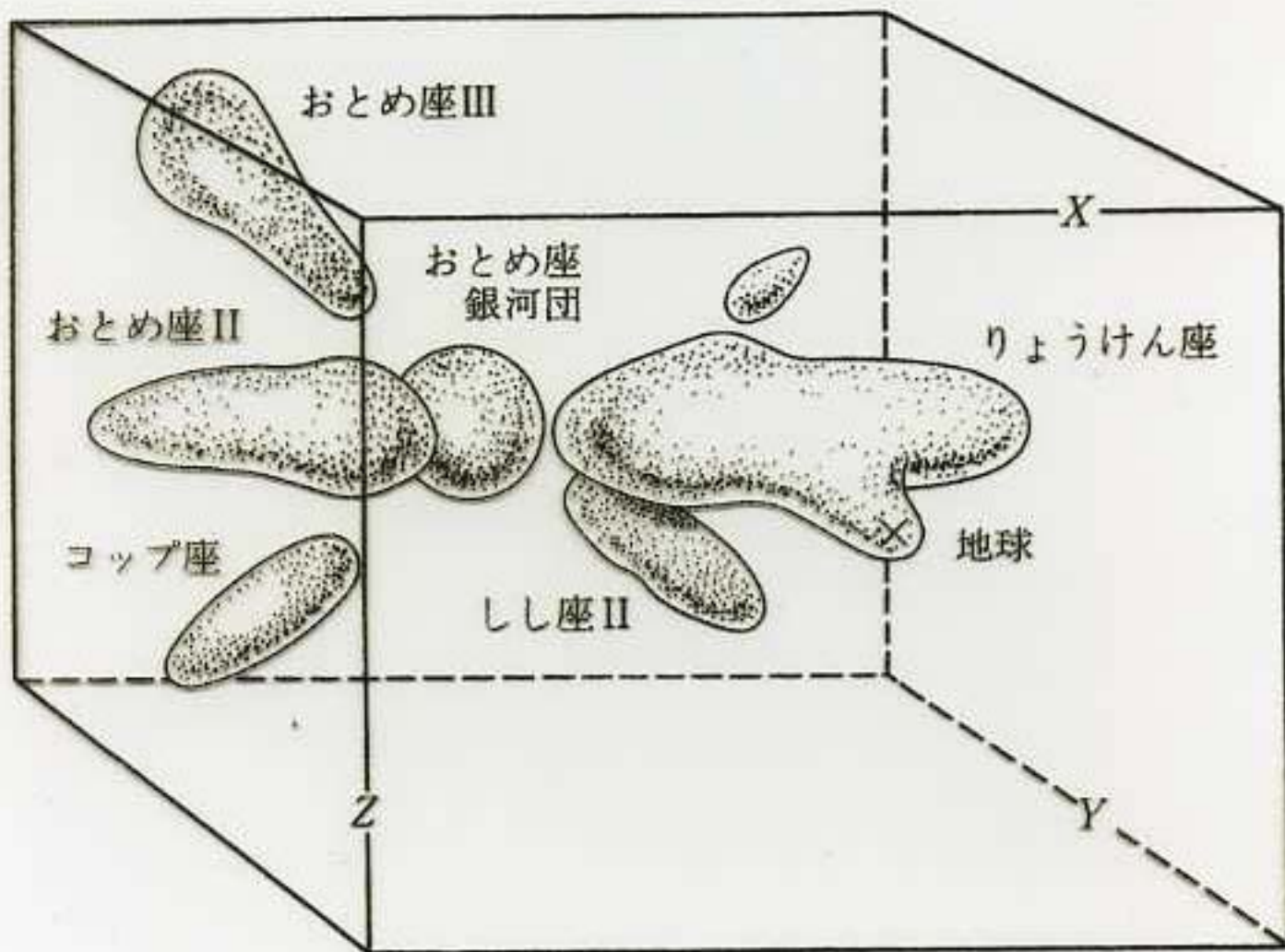


図1.9 超局所銀河団

[Tully, R. B., *Sky & Telescope*, 63, p. 554, Sky Publishing Corporation (1982)]

一般相対論を宇宙全体に応用するとどうなるか？

じっとしておれない宇宙

一般相対論の宇宙：静的で一様な閉じた有限の時空

(1) アインシュタインの球形宇宙

- 空間的には有限であるが、閉じていて、境目はなく、物質が(大局的には)ほぼ均一に分布している宇宙
- イメージ：3次元ユークリッド空間の中の球の表面すべて、そしてそれのみからなる空間

← 1910年代当時の観測される宇宙では、物質(天体)が大局的には一様に分布していた(局所的には、銀河系のように物質が偏って分布する領域があることを排除しない)

恒星の運動は極めて小さく、宇宙全体は変化のない定常的な状態にあると考えられたから

一般相対論の宇宙：静的で一様な閉じた有限の時空

(2)ド・シッターの宇宙

- 空間的には有限であるが、閉じていて、境目はなく、物質が(大局的には)ほぼ均一に分布している宇宙
- イメージ: 3次元ユークリッド空間の中の球の表面すべて、そしてそれのみからなる空間

(物質の含まれない宇宙、物質密度が平均でゼロ)

宇宙定数を含む重力場の方程式の解で、固有の重力場が備わっている。

宇宙(時空)が膨張する可能性

膨張宇宙論の系譜

1888年 H.C.フォーゲル(ドイツの天文学者)

星からの**光のドップラー効果**を発見:星からの光の分析

→ **スペクトルの赤方偏移**

(参考)ドップラー効果

放射(音, 光など)の源が観測者と相対的に運動しているときに観測される波長が変化する現象. 源が観測者に

近づくときには波長は短くなり(振動数は高くなり)遠ざかるときには波長は長くなる(振動数は低くなる). 星がわれわれから遠ざかるときには, 光の全スペクトルは赤色の方にずれる.

例:うさぎ座デルタ星は毎秒99キロメートルの速度で後退.

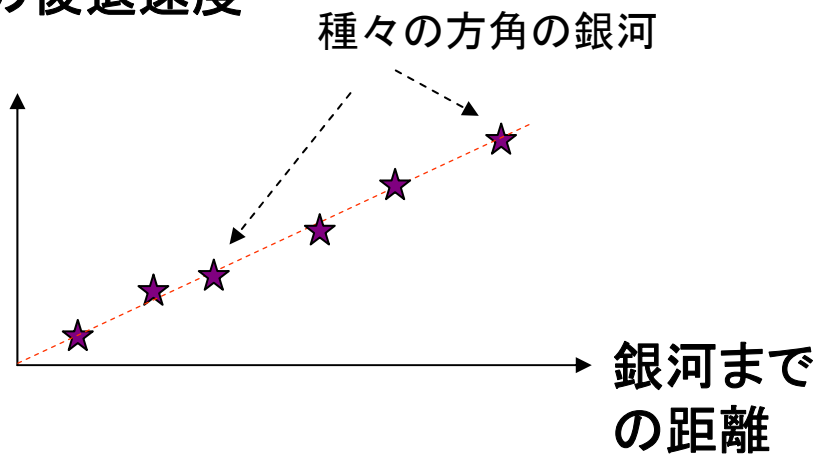
1920年 V.M.スティファース(アメリカの天文学者)

当時われわれの銀河系内にあると思われていたいくつかの"星雲"について, その赤方偏移を測定したところ, それら全部が毎秒1,800キロメートルにも達する驚くべき速度で後退していることを発見した.

1929年 ハッブルの法則

(銀河後退速度と銀河までの距離が比例する)

銀河の後退速度



意味は何か？

遠いほど速く遠ざかる

銀河が存在する方角によらない

銀河が張り付いている
空間自体が膨張している！！

エドウィン・パウエル・ハッブル

Edwin Powell Hubble (1889-1953)

アメリカの天文学者。我々の銀河系の外にも銀河が存在することや、それらの銀河からの光が宇宙膨張に伴って赤方偏移していることを発見したことで知られている。彼は近代を代表する天文学者の一人であり、現代の宇宙論の基礎を築いた人物である。



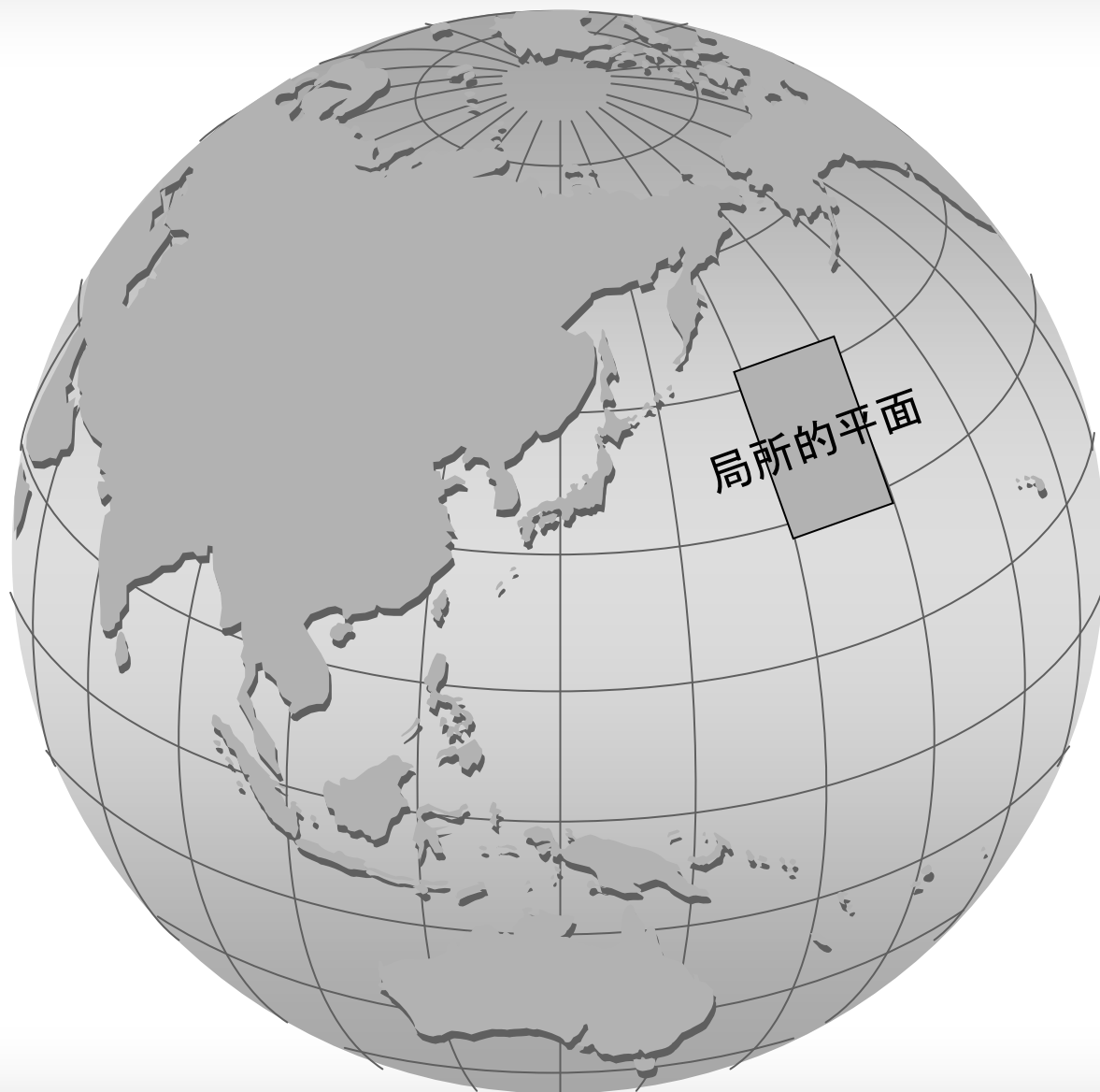
Edwin Powell Hubble (1889～1953年)
[NASA 提供]

2次形式

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a xy + b yz + c zx$

どうしてピタゴラスの定理は、
 $a=b=c=0$ なのか！？

- 平らな空間(ユークリッド幾何学) $\rightarrow a=b=c=0$
- 曲がった空間(リーマン幾何学) $\rightarrow a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$



物質も電磁波もないところの重力方程式は、

となる。

時間に依存せず、座標原点に重心をもち、球対称な質量分布をしている場合、
シュヴァルツシルトの解がある。

シュヴァルツシルトの解

時間に依存せず、
座標原点に重心をもち、
球対称な質量分布をしている場合、
シュヴァルツシルトの解がある。

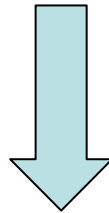
この場合、重力ポテンシャル Φ は、と書ける。

この半径で、 g_{11} が発散する。→特異点

$r=a$:事象の地平線

Aより内部からでた光は、外にでられない。
太陽の場合： $a=3\text{km}$ 、地球の場合： $a=9\text{mm}$

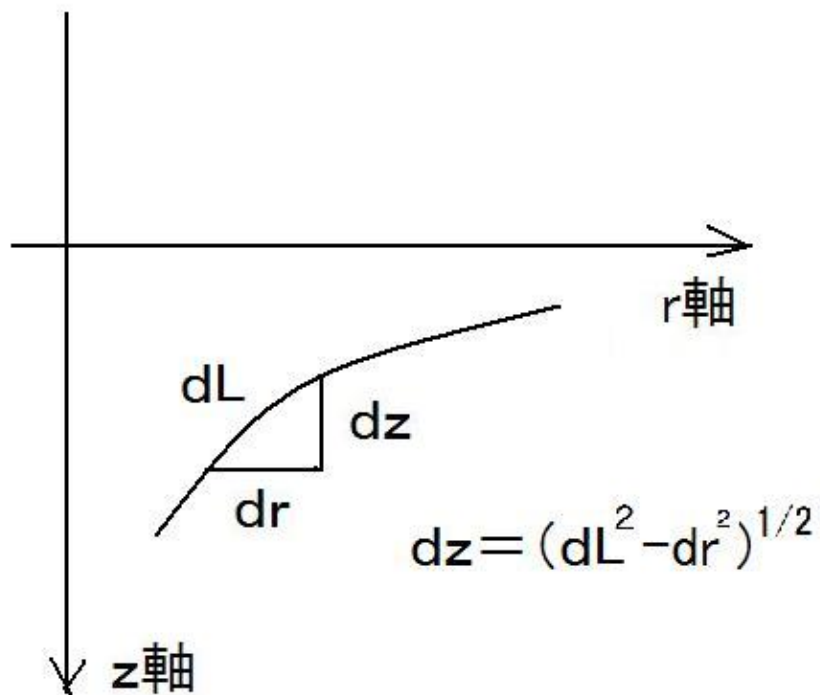
天体の半径が a よりも小さい場合



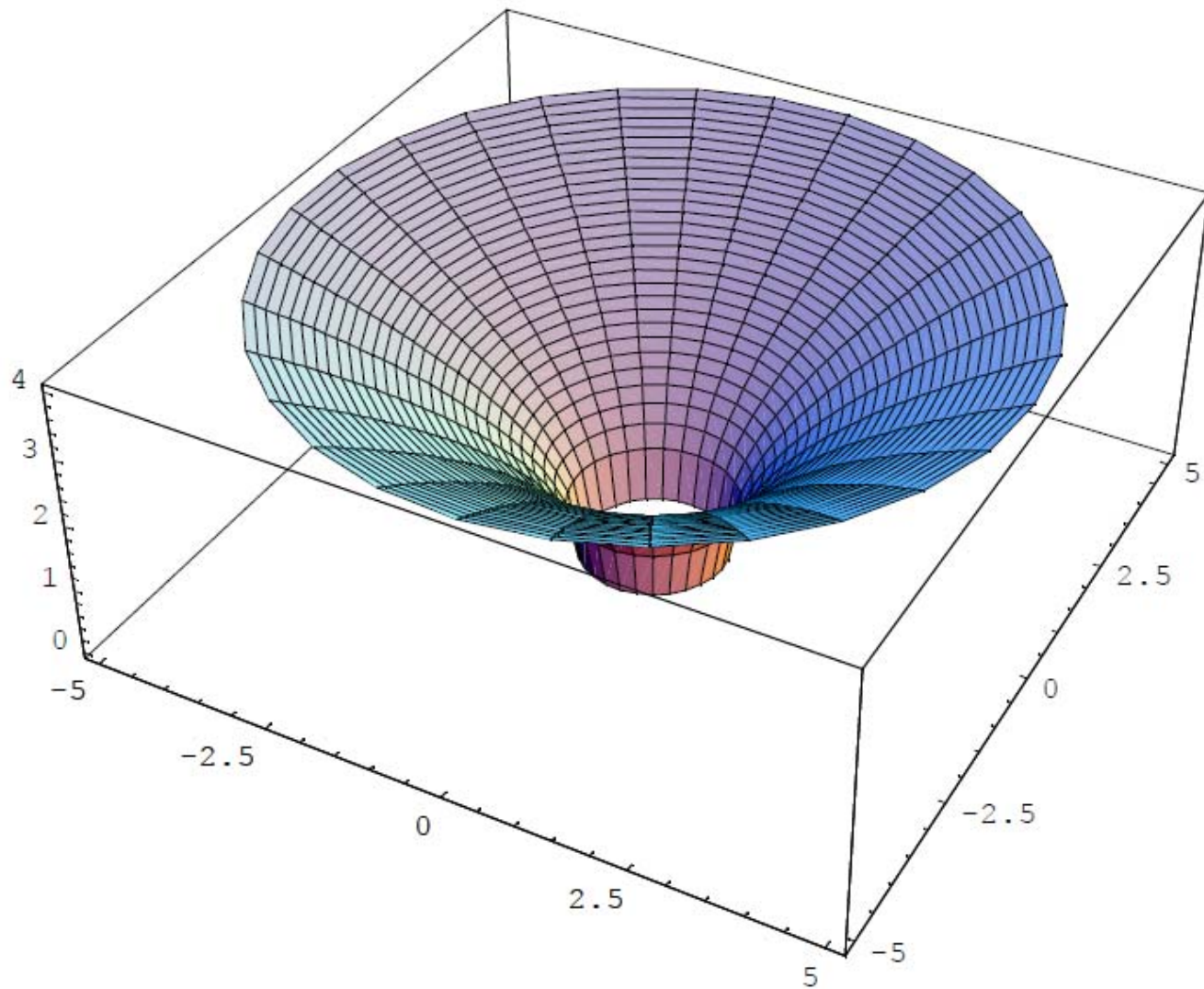
ブラック・ホール化する

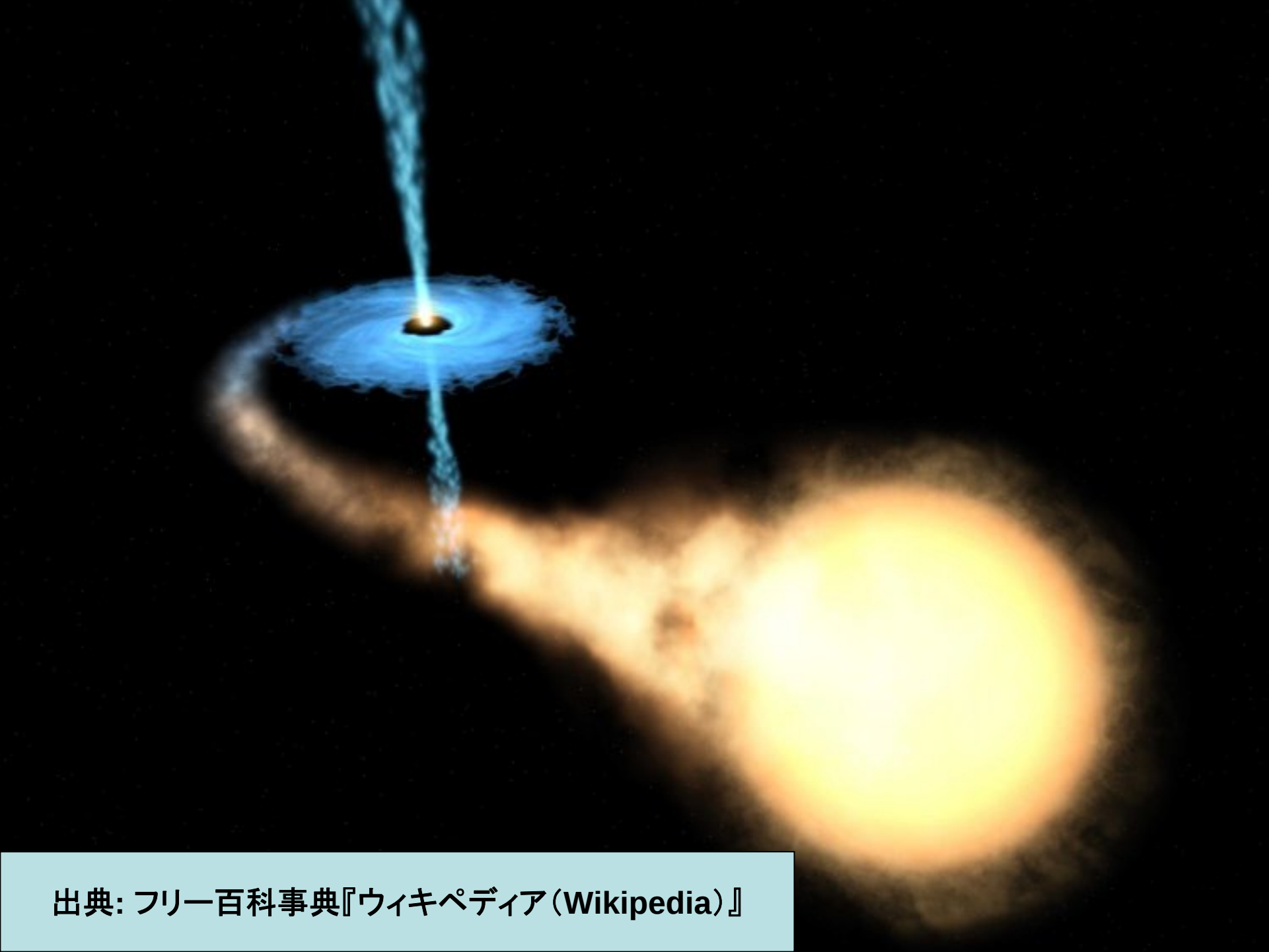
ブラックホールを描いてみよう

- 新しい軸(z軸)を作る。



```
In[1]:= ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], 2 Sqrt[r - 1]}, {t, 0, 2 Pi}, {r, 1, 5}]
```





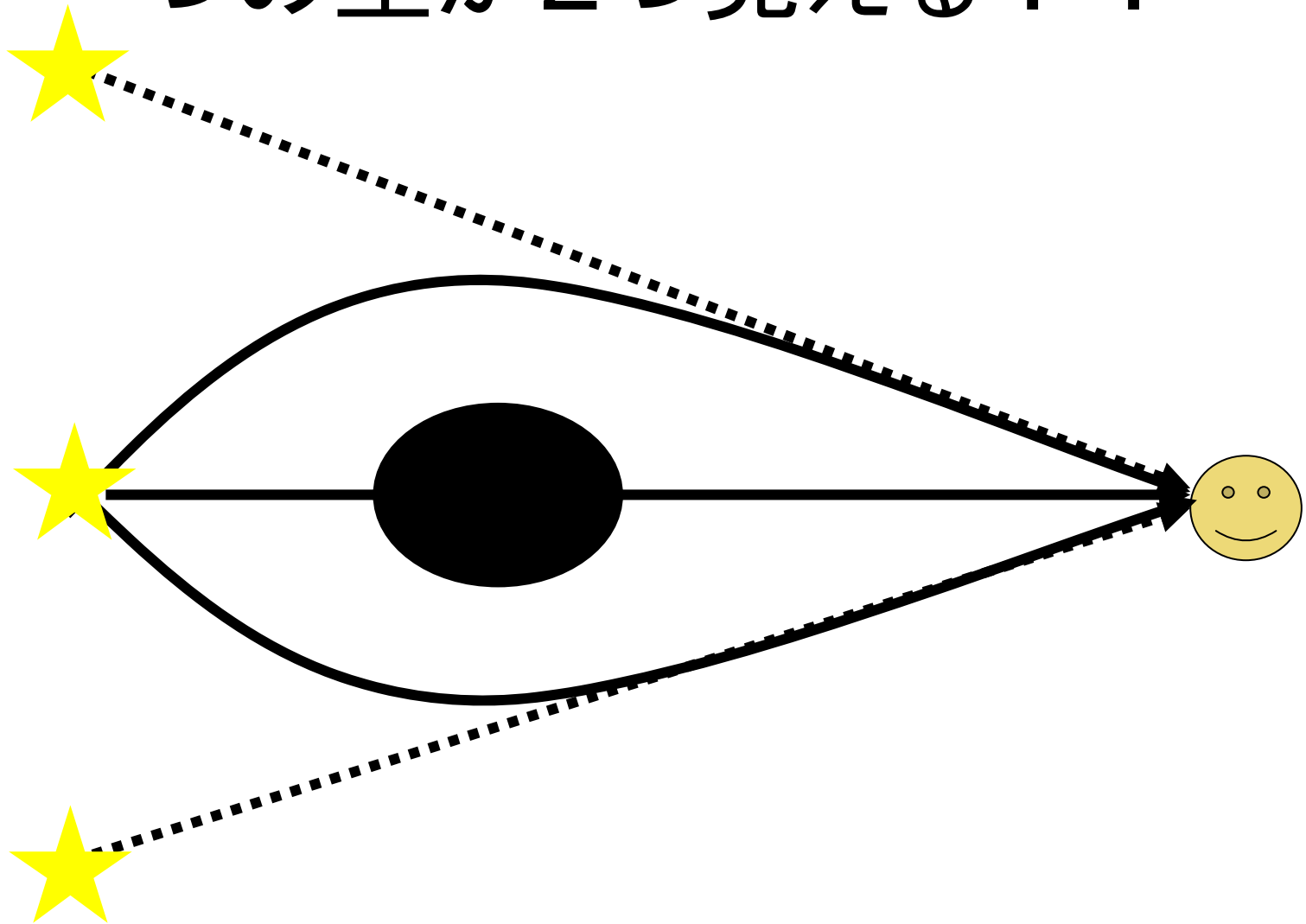
出典: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

絵あるBHは、非対称

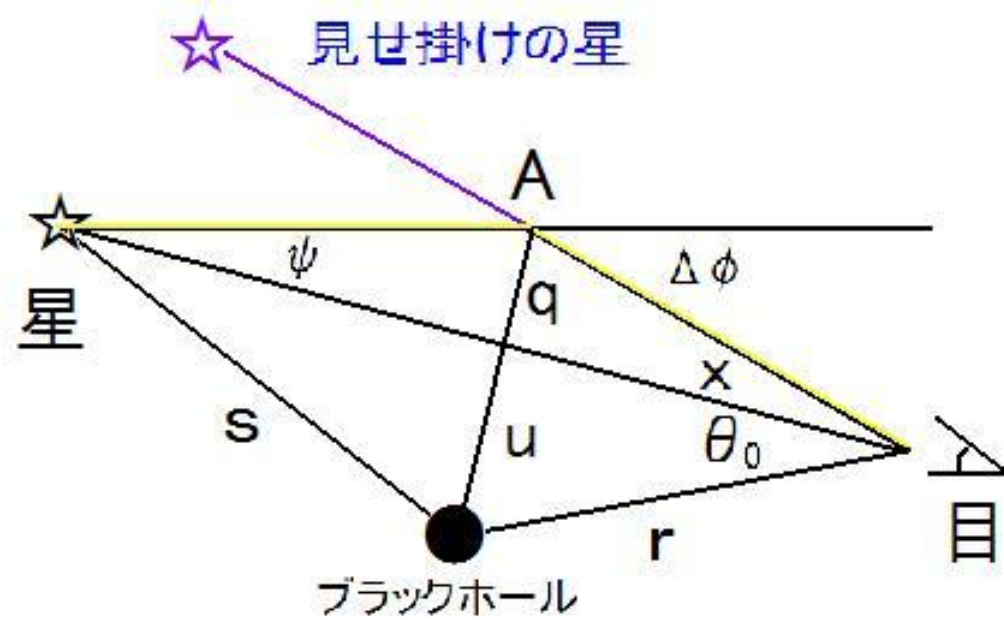
- 絵のBHは、別解のもの。
- 「カーの解」とよばれており、軸対称の解。
- シュワルツシルト解を改良したもの。

BHによる不思議な現象

一つの星が2つ見える！？

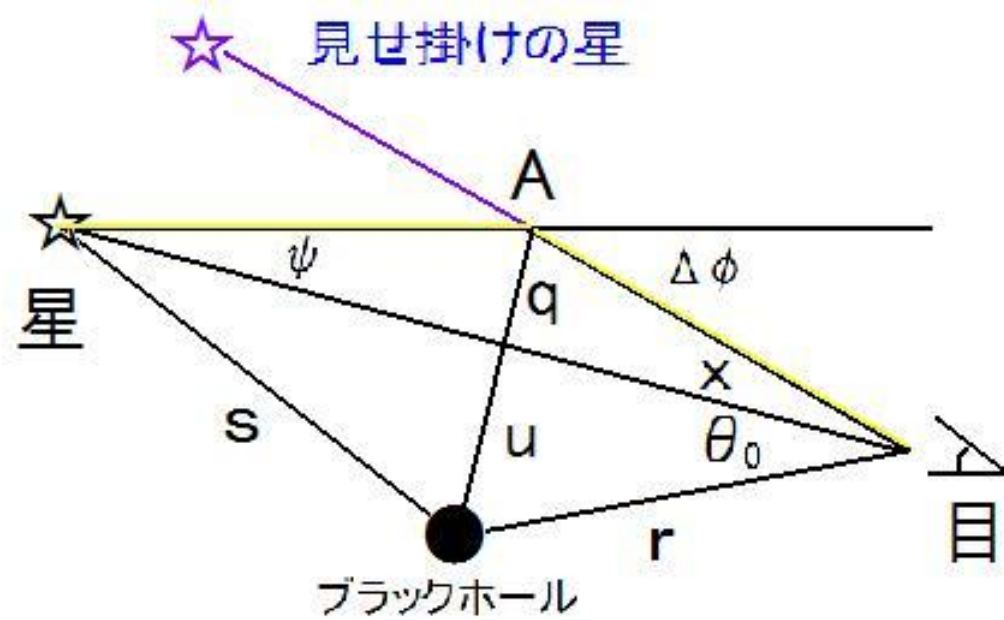






$$\theta_{\text{obs}} = \theta_0 + x$$

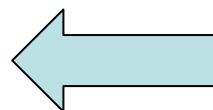
$$\psi + x = \Delta\phi$$



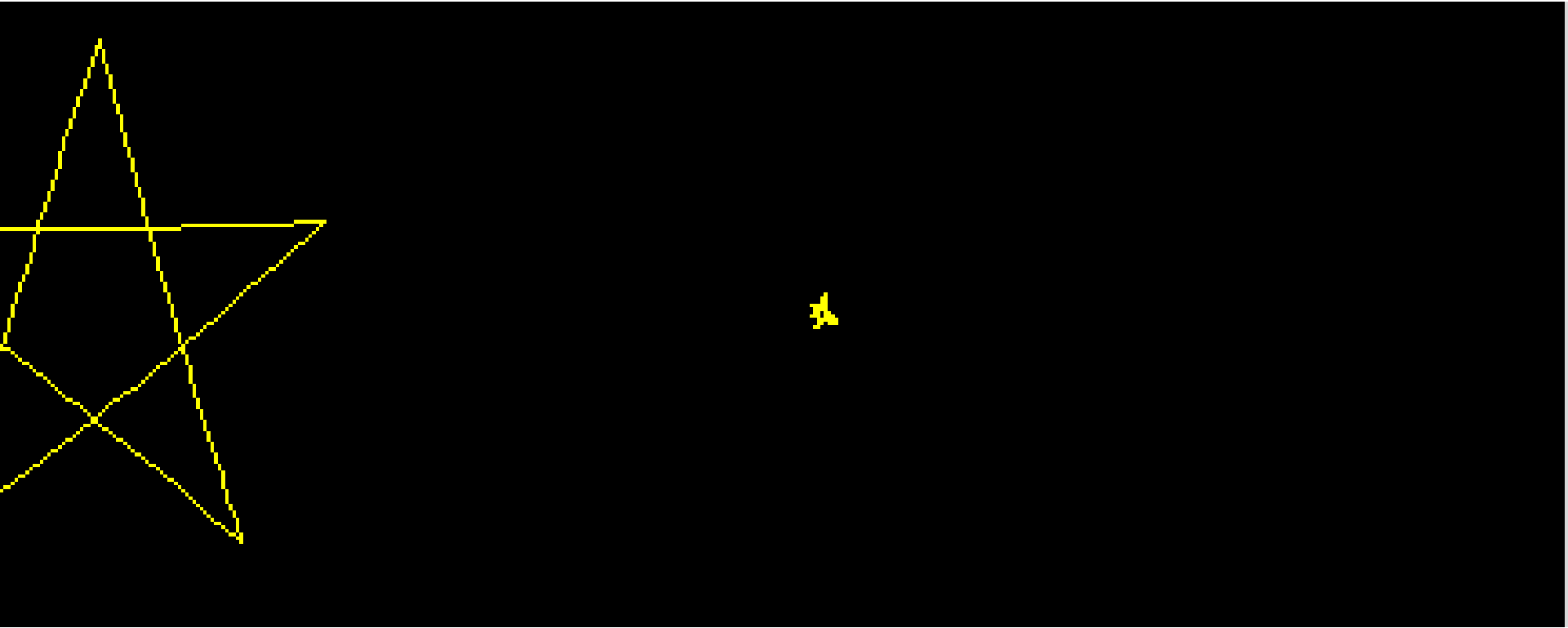
$$\theta_{\text{obs}} = \theta_0 + x$$

$$\psi + x = \Delta\phi$$

(シュバルツシルトの解から導かれる)



ブラックホールによる食 アインシュタイン・リング



水星の近日点前進

	周期 (年)	予想値 (秒/100年)	観測値 (秒/100年)
水星	0.2409	43.0	43.08 ± 0.3
金星	0.6152	8.63	8.6
地球	1.0000	3.84	3.8
火星	1.8809	1.35	

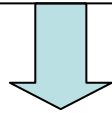
P. Bretagnon, Astron. Astrophys. 114 (1984) 278.

R. L. Duncombe, Astron. J. 61 (1956) 174.

宇宙の起源と広がり

宇宙原理

- 空間は一様で等方的に広がっている。



我々の3次元空間は、4次元球（あるいは4次元双曲面）張り付いている。

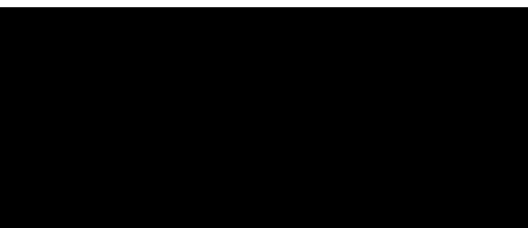
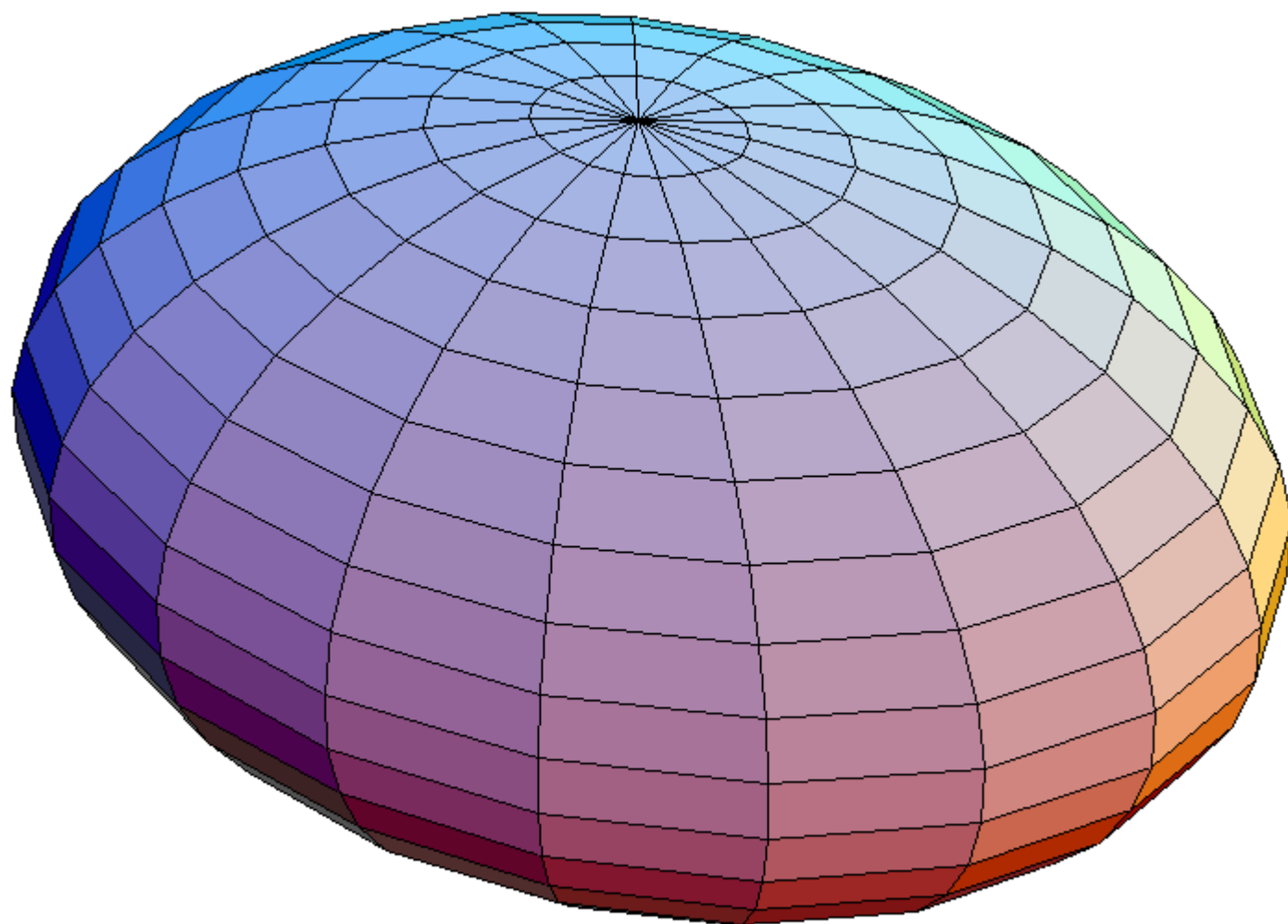
ここで、改めて $r = R \sinh \chi$ と読みかえる。

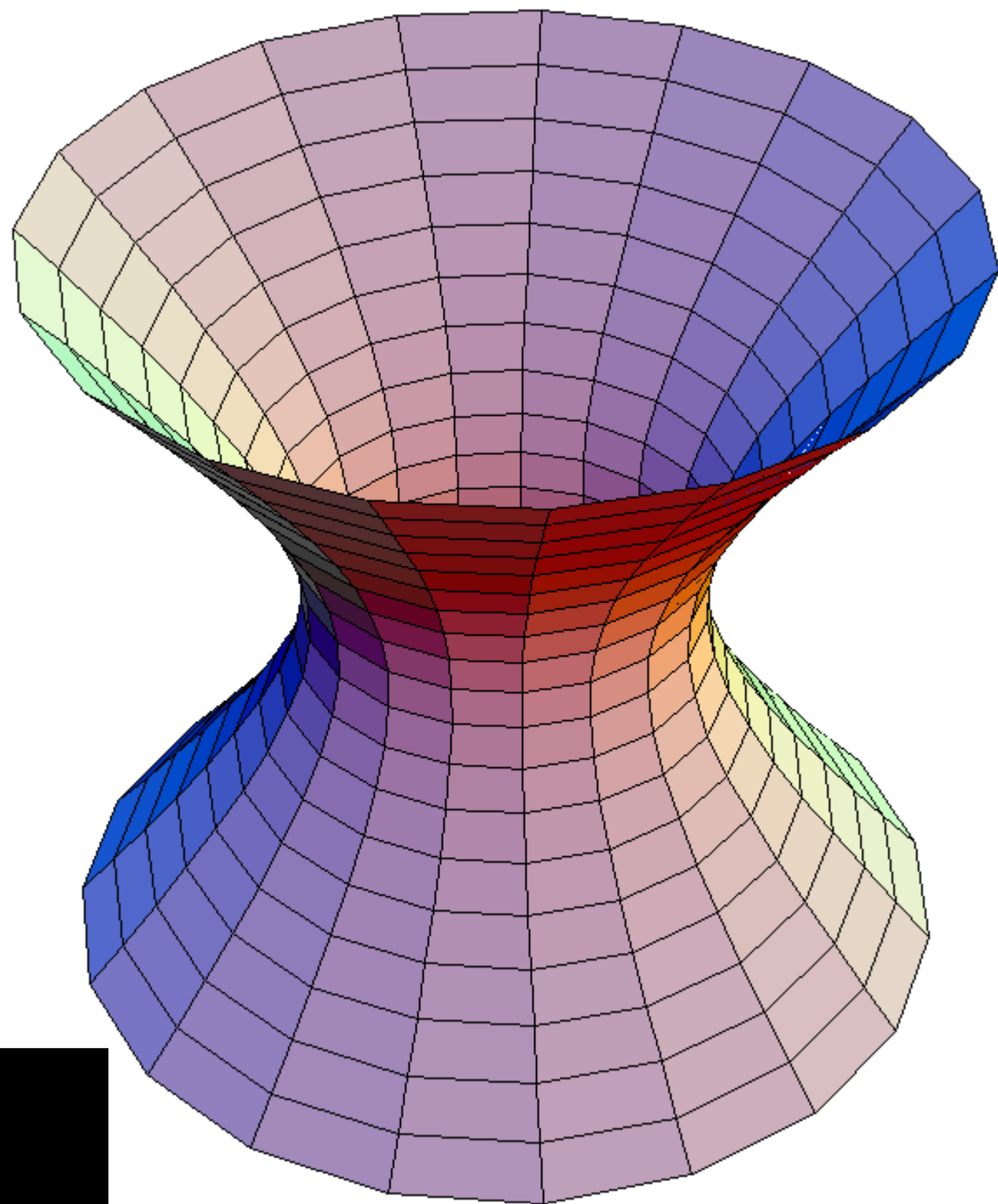
R: 曲率半径 $K = -1/R^2$

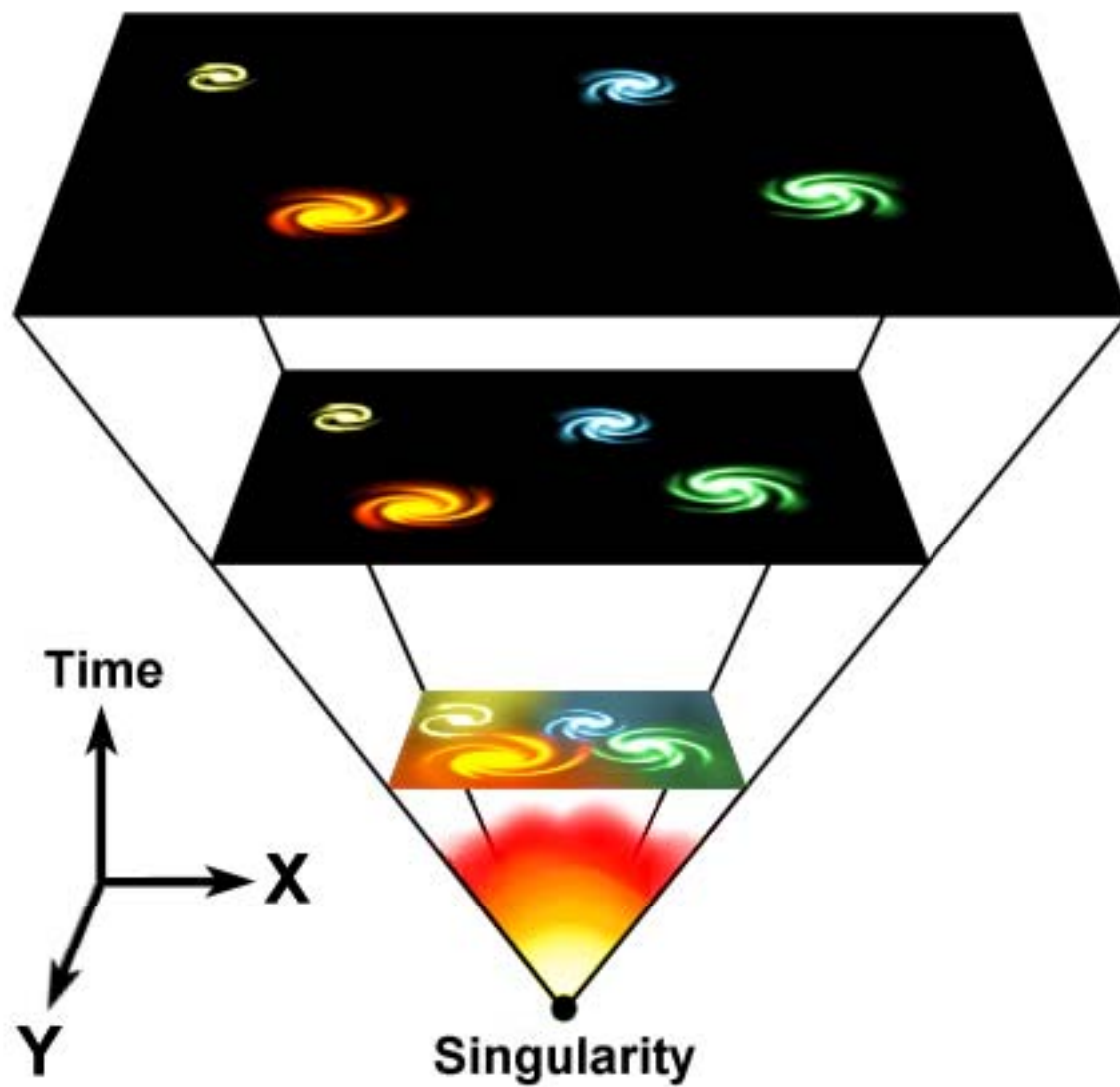
$K = 0 \cdots$ 平坦な宇宙

$K > 0 \cdots$ 4次元球面上の宇宙 (閉じた宇宙)

$K < 0 \cdots$ 4次元双曲面上の宇宙 (開いた宇宙)



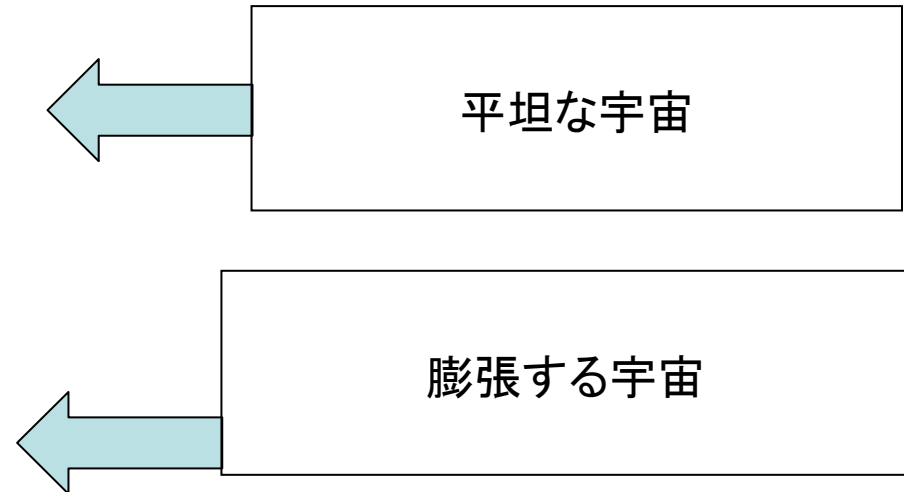




出典: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

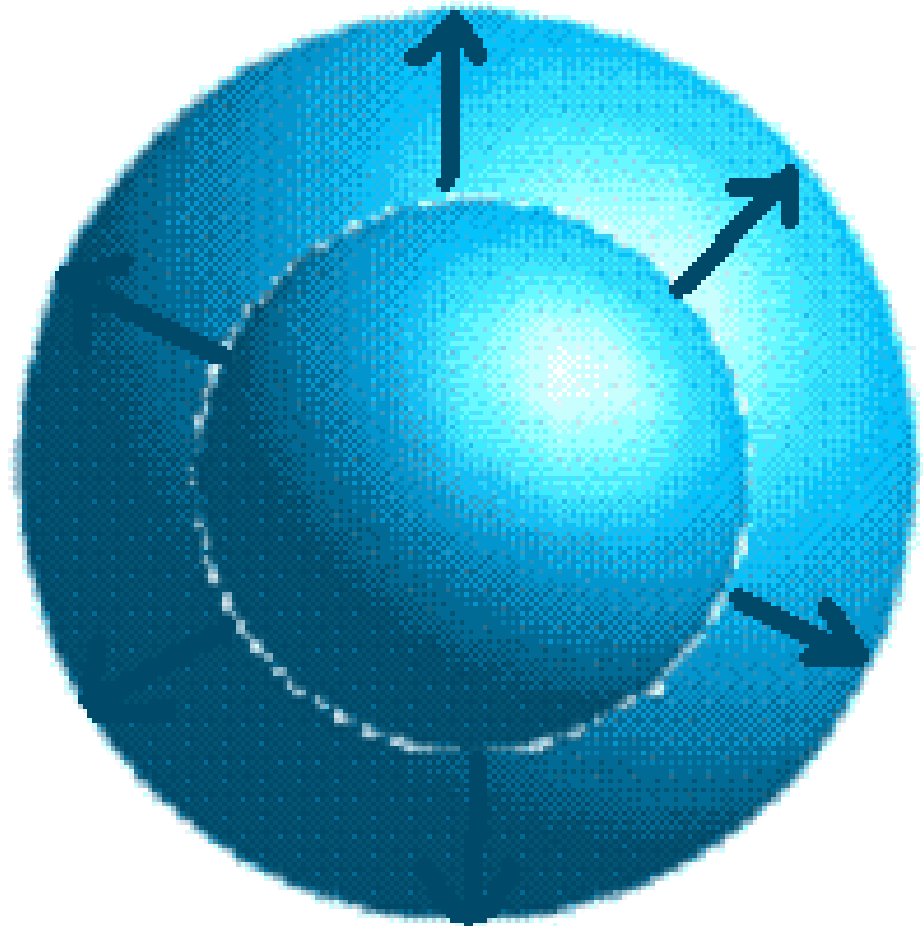
ロバートソン・ウォーカー時空

- 宇宙原理(4次元面上の3次元空間)とスケール因子を組み合わせる。

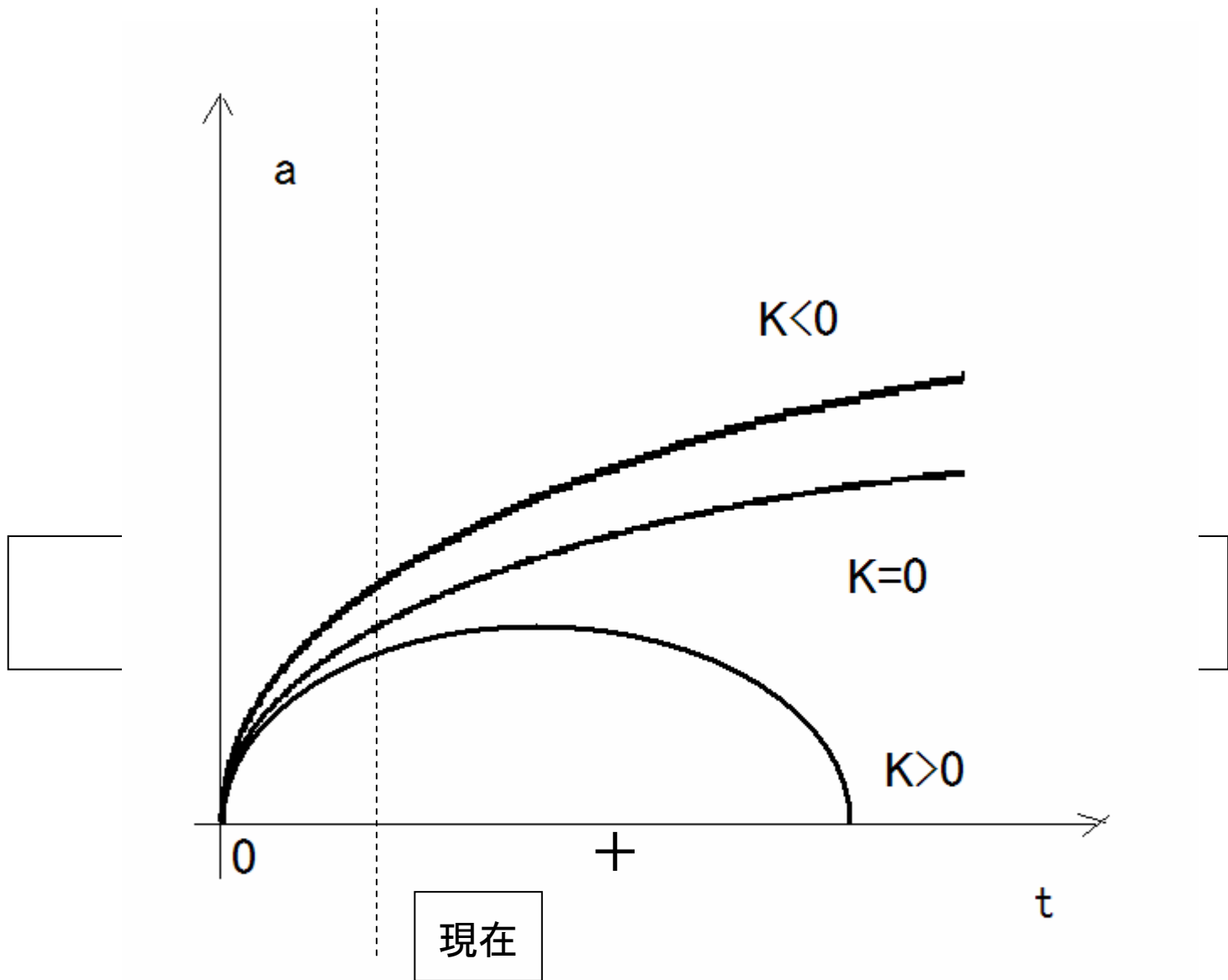


フリー-

- 速度 v で膨張する。
- 運動エネルギー:
- 重力エネルギー:
- エネルギー保存則
両者はつりあう。



a : ハッブル定数
(宇宙の半径)
 G : 重力定数
 M : 宇宙の質量



Alexander Alexandrovich Friedman or Friedmann (1888-1925)

アレキサンダー・フリードマン
ロシアの天文学者、数学者



フリードマン・モデルの3本の柱

一般相対性理論(宇宙項なし)

アインシュタインは彼の一般相対論のじゅう方程式に宇宙項を人為的に加えて、静的宇宙にしたが、フリードマンは1922年、一般相対論の宇宙方程式は不安であること(宇宙が動的であること)に気づいた！

宇宙の一様性の仮定

宇宙は大局的には(銀河と銀河の距離程度スケールでは)どこでも同じ性質をもつと考える。局所的には、銀河が存在するように、一様ではない。

————→ 宇宙には中心がないこと

宇宙の等方性の仮定 宇宙はどの方向にも同じ性質

一様性と等方性は同じことではない。一様でなければ、等方ではありえない！

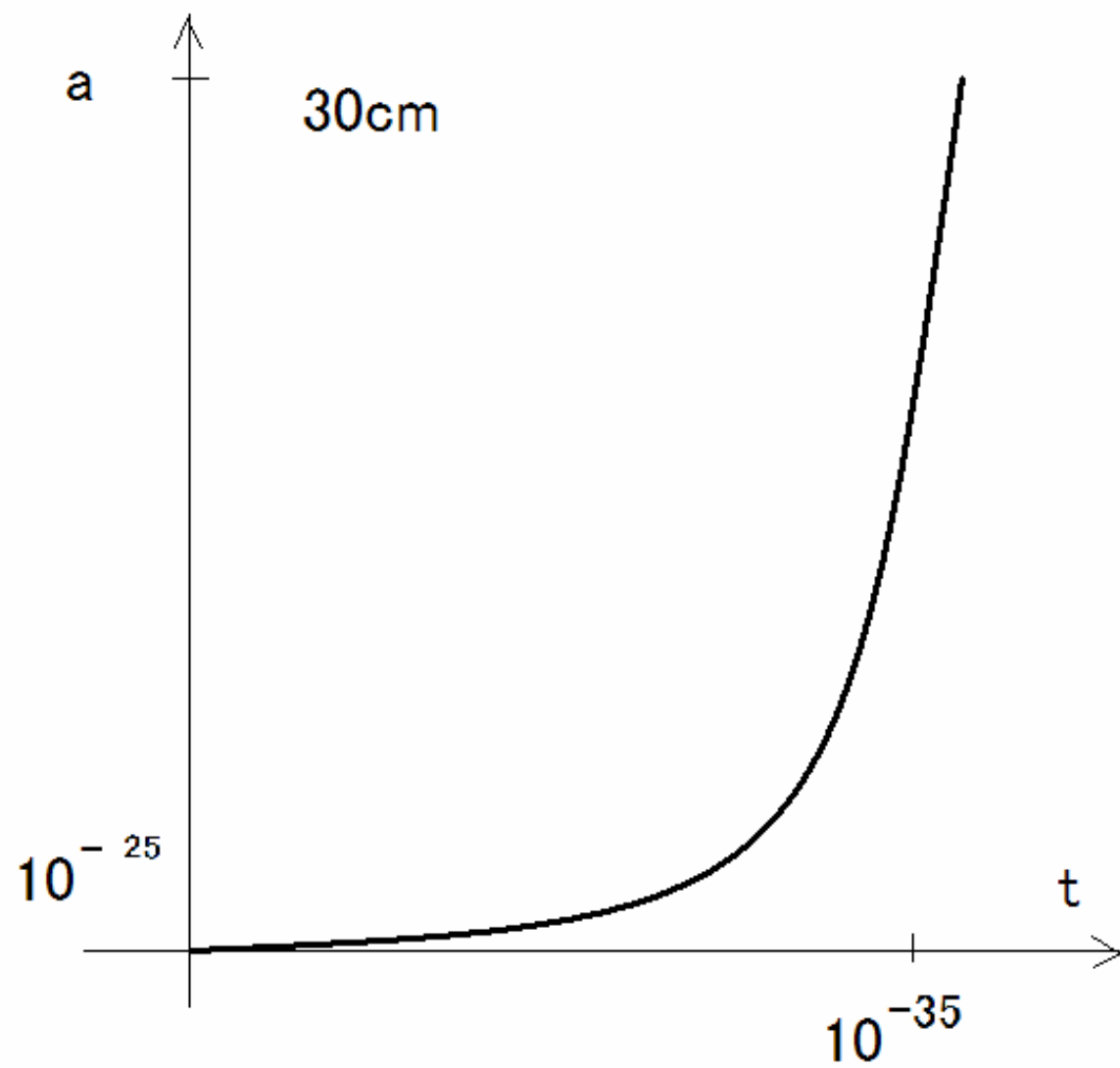
佐藤・グース理論(1981年)

- 1981年に佐藤勝彦・アメリカのグースによって導入された。
- 宇宙の初期には、宇宙項 Λ が無視できないくらい大きかったと仮定する。

+



ビックバン：インフレーション宇宙



何が膨張するのか？

ゴムひもの(=1次元宇宙)におけるハッブルの法則

ゴムひものに結び目をつけて、ある時間間隔 Δt の間で2倍に引きのばすと、結び目の間隔は増加する。

結び目が遠ざかる速度 v は距離 r に比例する。比例係数を H とすると、

$$v = H \cdot r$$

というハッブル法則が出る！

ある結ぶ目を原点に選び、そこから他の結び目までの距離 r を

$$r = a x$$

と書くことにする。

x には 1, 2, 3, ... という値などを割り当てる。長さの単位は a で調節できる。

どんな単位で測ろうと、距離の比は変わらない。

a はこの比例関係を表す比例係数である。

ゴムひものが伸びるとは、 a が大きくなること！ (スケール変数)

a は、 x には依存しないが、時間的に変化する； $a = a(t)$

伸ばしている期間の速度 v は

$$v \equiv \dot{a}x = \frac{\dot{a}}{a}ax$$

$$\rightarrow v = Hr, H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{ハッブルの法則}$$

x : ゴムとともに動く座標 (= 共動座標)

伸びを表す関数 a が x に依存しないのは宇宙の一様性の仮定の結果である。

「一様な」伸びがハッブルの法則を生み出す！

一様に伸縮するテスト粒子系

テスト粒子系とは、その粒子系を(考えている系に)置いても、力の場を変えないことを意味する。

球対称な重力源のポテンシャル $-G M(r) / r$

(向心方向の)運動方程式

$M(r)$: 半径より内側にある重力質量

$$\ddot{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (1)$$

したがって、 $r = ax$ とにおいて、 x が時間的に一定とすれば、 a だけの関係式

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho \quad (2)$$

$$\longrightarrow \ddot{r} = -\frac{4\pi}{3} G \rho r \quad (4)$$

(宇宙の全質量) M が一様密度 ρ で分布する質量によるとすると

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \rho a \quad (5)$$

(5)は x が現れないので、中心をどこにとってもよい、半径は無限大でもよい！

一様密度の重力で自己束縛する系の動力学

: 空間の動力学 (ニュートン力学)

式(5)、 a の時間依存性(動力学)を解くには、密度 ρ が a にどのように依存するか与える必要がある。→ 重力源となる「物質」を特定すること。

ここでは、ダスト(dust、宇宙塵)、放射、真空という物質の中で、ダストの場合を考える。

ダストでは、 $\rho(t)a(t)^3 = \text{一定}$ であり、体積の膨張に反比例して、密度が減少する。

(10)式は次のようになる。

$$\ddot{a} = -\frac{A}{a^2} \quad (A: G\text{を含む定数})$$

時間 t について積分すると

$$\dot{a}^2 - \frac{2A}{a} = B \quad (B: \text{積分定数}) \quad (11)$$

膨張宇宙論とビッグバン

重力場の方程式における宇宙項の復活について

最近の宇宙論では、宇宙項は復活しつつある。
インフレーション理論でも、宇宙の暗黒エネルギーの候補としても、また最近観測された宇宙膨張の加速のためにも必要とされるようである；

佐藤文隆・松田卓也「相対論的宇宙論(新装版)」
講談社ブルーバックス(1973年発行の新装版)2003
年)の270ページ。

「なっとくする相対性理論」二間瀬敏史、松田卓也(講談社)の162ページ
など。

まとめ

- ハッブルの法則から、現在の宇宙は膨張している。
- 宇宙の運命を決めるフリードマン方程式は、ロバートソン・ウォーカー時空(計量)と一般相対性理論の宇宙方程式によって導かれる。
- フリードマン方程式によって、宇宙はどこまで膨張し続けるのかが理解できる。
- 宇宙の初期にインフレーション宇宙があった。
(佐藤・グース理論)

参考文献

30年以上にわたって定評のある入門書:

佐藤文隆・松田卓也「相対論的宇宙論(新装版)」

講談社ブルーバックス(1973年発行の新装版)2003年

入門書と専門書の間隙を埋め、宇宙論における各種の誤解を正す本

佐藤文隆「いまさら宇宙論？」丸善。2002年

入門書から専門書レベル

- 「なっとくする宇宙論」二間瀬敏史著(講談社)
- 「なっとくする相対性理論」二間瀬敏史、松田卓也(講談社)
- 「相対性理論」中野薫夫著(岩波書店)
- 「一般相対性理論入門」エドウィン・F・テイラー他著(Pearson, Education Japan)
- 「相対性理論」窪田高弘、佐々木隆 共著(裳華房テキストシリーズ・物理学)
- 「相対性理論」内山龍雄著(岩波全書)
- 「ディラック・一般相対性理論」江沢洋訳(東京図書)