

2章 時空と物質は相互に依存しあう —強い重力と一般相対論—

- 一般相対論においては、ベクトル場や、テンソルには「反変性」と「共変性」といわれる性質が重要になる。計量テンソルは、時空間の性質を表わすもので、等価原理によって導かれるアインシュタインの重力場の方程式は、これを決定する。ここでは非ユークリッド幾何学が成り立っている。
- 一般相対論は物理法則の(微分)幾何学化を目指す。
- 強い重力による空間の大きな歪みによって、ブラックホールなどが理論的に予想され、それは実際に存在するといわれている。

一般相対論の要点(1)

アインシュタインは、特殊相対論に対する反省から、次の大胆な要請を原理として採用した(1915年)

等速度運動する座標系の間について適用

一般相対性原理

すべての(基本的な)物理法則はいかなる座標系においても、全く同じ形式で書き表される

(数学的に言えば; 物理法則はすべて一般座標変換に対して、共変な形式に書き表されなければならない)

等価原理

一様な重力場では、適当な加速度運動をする座標系を基準にとることにより、すべての物理現象に対する重力の作用を消滅させることができる。

自由落下しているエレベータ内は「無重力」系になる！

運動方程式に現れる質量(=慣性質量)と重力に現れる質量(=重力質量)は同じ(等価)である。

一般相対論の要点(2) 得られる結論

- (1) 時空は剛体ではなく、物質の存在により時空は変化する(歪む)
- (2) 重力は質量を持つ2つの物体間に無限大に速さで伝わる遠隔力ではなく、物体により時空が変形し、その時空のくぼみに別の物体が転がることによる！

今見ている太陽の光りは8分前の太陽から来た光である。

太陽の重力により地球は楕円軌道を行っているが、太陽が消滅する場合、その8分後に地球は等速直線運動を行う！

- (3) 時間の進み方は重力の強さに依存する。
相対的に弱い重力の系では、時計は進む！

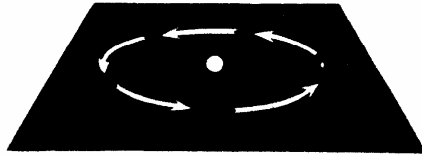
重力と空間 についての異なる見方

ニュートンの見方



質量を持つ物体の間の力

絶対空間の中を
瞬間的に伝わる



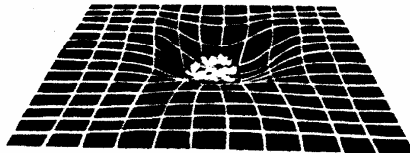
重力の影響によって太陽を
周回する惑星



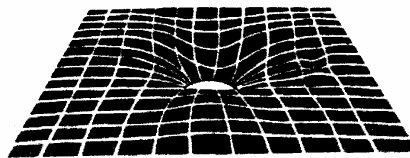
アインシュタインの見方

物質（質量）が存在すると
周囲の時空は曲がる

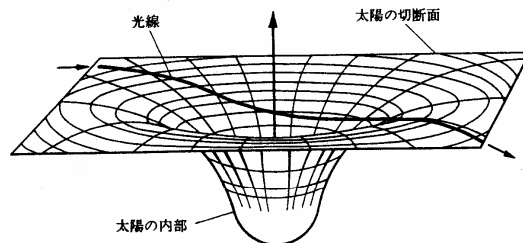
作用は光速で伝わる



重い岩が乗っているゴムシートの歪み



重い（質量の大きい）恒星
の近くで曲がっている時空



太陽の近くでの光線の振る舞い

一般相対論の要点(3) 一般相対論の観測的検証

地球表面では重力が弱すぎて、ニュートンの重力理論と一般相対論の重力理論の差は観測できるほど大きくない。

水星の楕円軌道が徐々にずれる(回転する)現象: 近日点移動

: 1世紀間に574角度秒

ニュートンの重力理論: 531角度秒は説明できたが、残る43角度秒は説明できなかった。

一般相対論の重力理論: 574角度秒という正しい結果が得られた!

太陽の重力による恒星からの光線の曲がり(予言)

1919年、エディントンらの日食観測により裏付けられた!

一般相対論の要点(4)

一般相対論効果は実際に使われている！

カーナビはGPS(全地球位置測定システム)で技術的に可能になった。
GPSには超超高精度の時計が必要である。

地球表面に比べて、人工衛星では地球表面よりも、重力が弱く、時計がより進む！

人工衛星では、特殊相対論効果で時計が遅れ、一般相対論効果では時計が進む。
GPSではこの両方の効果を考慮して、地上における位置測定精度を高めている。

一般相対論における線素と計量テンソル

微小世界距離 ds =線素 (line element)

任意の座標系 (曲線座標系を含む) に対する微小世界距離の2乗は、一般に、座標微分の2次形式で表される。

$$(ds)^2 \equiv g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$$\begin{aligned} &= g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \\ &\quad + 2(g_{01}(x)dx^0dx^1 + g_{02}(x)dx^0dx^2 + g_{03}(x)dx^0dx^3 \\ &\quad + g_{12}(x)dx^1dx^2 + g_{13}(x)dx^1dx^3 + g_{23}(x)dx^2dx^3) \end{aligned}$$

ここで、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. 対称テンソル。

$g_{\mu\nu}$: 計量 (metric)、リーマン計量またはリーマン計量 (Riemannian metric)
または基本テンソル (fundamental tensor)

(採用される) 曲線座標で表される空間の幾何学的性質を決定する！

一般相対論における基本的な考え方

物体間に働く重力は、すべての物体に共通の性質であるから、物体の存在自体が重力の存在と本質的に密着した事柄であり、このことはすべての物体に共通な4次元時空の性質に反映されるものである。

——→ **4次元時空の構造は物体の存在により定まり、物体のまわりで歪む。**

——→ **一般相対論においては、計量は一般に(時空)座標 x に依存する！**

この時空の性質は物理現象に他ならない。これを観測する人の立場(=座標系)が、例えば相互の運動により異なっても、時空構造はこれと無関係に定まっている。

ただ、観測者の立場(=座標系)が違えば時空構造を表すのに用いるリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ は座標系により異なることとなる。しかし、同じ時空を観測するのだから、微小世界距離 ds 自体は座標変換しても変わらない不変量である。

$$(ds)^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}, (ds')^2 \equiv g_{\mu\nu}'(x)dx'^{\mu}dx'^{\nu},$$

$$(ds)^2 = (ds')^2$$

固有時、座標時と局所慣性系

特殊相対論の場合と同様に、一般相対論においても、次のように、固有时间 $d\tau$ を定義する。

$$-(c \cdot d\tau)^2 \equiv (ds)^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

例えば、地球の重力が存在する場合を考えると、地球を含む広い範囲を1つの慣性系(=**大域的慣性系**)と考えることはできない。

しかし、等価原理により、自由落下するエレベータ内のような、**局所的慣性系**を考えることはできる。

(すなわち、重力を消去する座標変換に相当する)

このような**局所的慣性系** ($\bar{x}_\mu$) **においては特殊相対論が成立するので**、この慣性系に固定した時計を考える(座標時 $d\bar{t}$)と固有时间と座標時間
は一致する。 $d\tau = d\bar{t}$

しかし、一般の座標系では、固有时间とその座標系に固定された時計(座標時)とは異なる。

$$d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-g_{\mu\nu} (dx^\mu / dt)(dx^\nu / dt)} \cdot dt / c = \sqrt{-g_{00}} dt$$

重力場方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) T_{\mu\nu}$$

重力定数

時空の形状(歪)とエネルギー・物質分布が相互に影響しあう！

計量テンソル

リッチ・テンソル

光速

エネルギー・運動量テンソル

スカラー曲率

補足1: 重力場方程式をアインシュタイン方程式ともいうが、数学者ヒルベルトは変分原理を用いて、アインシュタインとは独立に同じ式を導いた。

補足2: 非線形連立2階の偏微分方程式: 厳密解を求めることは大変難しい

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, R$ は $g_{\mu\nu}$ についての非線形な関数

補足3: 上記の式は以下のようにも書きなおせる。

単純化のための仮定が必要

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

補足1. 4: 上記の式の右辺の符号がマイナス符号になっている教科書もあるが、その理由は曲率テンソル(リーマン・テンソル)の定義が異なるためである。

重力場方程式の拡張(宇宙項を含む)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) T_{\mu\nu}$$

リッチ・テンソル 計量テンソル スカラー曲率 宇宙項(Λ :宇宙定数) エネルギー・運動量テンソル

補足1: アインシュタインは時間的に変化しない宇宙(静的な宇宙)を作り出そうとしていたが、1919年年ごろ、宇宙項を含まない重力場の方程式にはそのような解が含まれていなかった。そこで、アインシュタインは余分な宇宙項を追加した。

補足2: 1929年、ハッブルの法則により、宇宙膨張が発見された。このとき、宇宙項を含める理由がなくなったとして、アインシュタインは(「わが生涯最大の誤り」として)宇宙項を除した。

補足3: 宇宙項を含む拡張に至った経緯。アインシュタイン・テンソル $G_{\mu\nu}$ が縮約された微分恒等式(ビアンキ恒等式)を満たすことが必要であった。ところがメトリック・テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分は恒等的にゼロになってしまう。

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$$

この性質があるために、アインシュタイン・テンソル $G_{\mu\nu}$ に宇宙項を加えた修整されたアインシュタイン・テンソルを作ってもビアンキ恒等式を満たす。

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \rightarrow \nabla_{\nu} G_{\mu\nu} = 0$$

$$G_{\mu\nu}^{\Lambda} \equiv G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \rightarrow \nabla_{\nu} G_{\mu\nu}^{\Lambda} = 0$$

補足4: 宇宙項は真空のもっているストレス・エネルギー・運動量・テンソルとみなされる。宇宙定数は真空の持つエネルギーとみなされる。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} + \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu} \right)$$

物質に関係した部分

物質に関係しない部分

以下の部分は修正予定。

ベクトルの大きさ: スカラー

定義

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (長さ)

→ ピタゴラスの定理

定義

- $c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ (固有時)

→ 変形ピタゴラスの定理

基本テンソル:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \\ &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^0)^2\end{aligned}$$

$$H = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \eta_{\mu\nu}$$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ローレンツ変換

- 電車の中 (S' 系: x' 、 y' 、 z' 、 t')
- 電車の外 (S 系: x 、 y 、 z 、 t)

電車の進む方向をx方向に仮定すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

となる。

ローレンツ変換

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c},$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$A = \alpha_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x^{\nu} = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{\nu} x^{\mu},$$

$$dx^{\nu} = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{\nu} dx^{\mu},$$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

$$= \sum_{\mu, \nu, \lambda, \kappa} \eta_{\mu\nu} \alpha_{\lambda}^{\mu} \alpha_{\kappa}^{\nu} dx^{\lambda} dx^{\kappa},$$

$\therefore$

$$\eta_{\lambda\kappa} = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} \alpha_{\lambda}^{\mu} \alpha_{\kappa}^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \alpha_{\lambda}^{\mu} \alpha_{\kappa}^{\nu}, (\text{アインシュタインの和則})$$

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda} (\text{クロネッカーのデルタ})$$

共変ベクトルと反変ベクトル

$$a_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\nu}$$

共変ベクトル

反変ベクトル

4元速度ベクトル

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau},$$

$$u^{\mu'} = \alpha_{\nu}^{\mu} u^{\nu},$$

4元ベクトルの内積

$$a \bullet b \equiv a^{\mu} b_{\mu} = b^{\mu} a_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}$$

α 、 β を x^μ で書く

$$\beta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}, \quad \text{Jacobian}$$

$$\alpha_\mu^\nu = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu},$$

$$\left[\alpha_\mu^\nu \right]^{-1} = \beta_\mu^\nu$$

共変ベクトル場

$$S_{,\mu}(x) \equiv \frac{\partial S(x)}{\partial x^{\mu}}$$

スカラー場

$$S'_{,\mu}(x') = \beta^{\nu}_{\mu} S_{,\nu}(x)$$

スカラー場の微分は、ベクトルになる。

2次形式

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (長さ)

→ ピタゴラスの定理

- $c^2 \tau^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ (固有時)

→ 変形ピタゴラスの定理

2次形式

- $L^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a xy + b yz + c zx$

どうしてピタゴラスの定理は、
 $a=b=c=0$ なのか！？

- 平らな空間(ユークリッド幾何学) $\rightarrow a=b=c=0$
- 曲がった空間(リーマン幾何学) $\rightarrow a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

ユークリッド

- Eukleides
(紀元前365年? - 紀元前275年?)
古代ギリシアの数学者、天文学者とされる。いわゆる『原論』(ユークリッド原論)の著者である。ただし、実在を疑う説もある。その説によると、『原論』は複数人の共著であり、エウクレイデスは共同筆名である。



リーマン

- **Georg Friedrich Bernhard Riemann**, (1826年- 1866年)
はドイツの数学者。解析学、幾何学、数論の研究は、現代数学への発展に大きな影響を与えた。だが、病身のために、その研究生活は短く、先駆的な彼の研究は一部の数学者を除くと当時あまり理解されなかった。ただ、**リーマン幾何学**についての講演については、数学者ガウスが興奮のあまり、同僚にしばらくこの着想のすばらしさを語りつづけたといわれる。リーマンの数学は20世紀になると多くの分野で再評価され、現在では、19世紀を代表する数学者の一人と考えられている。



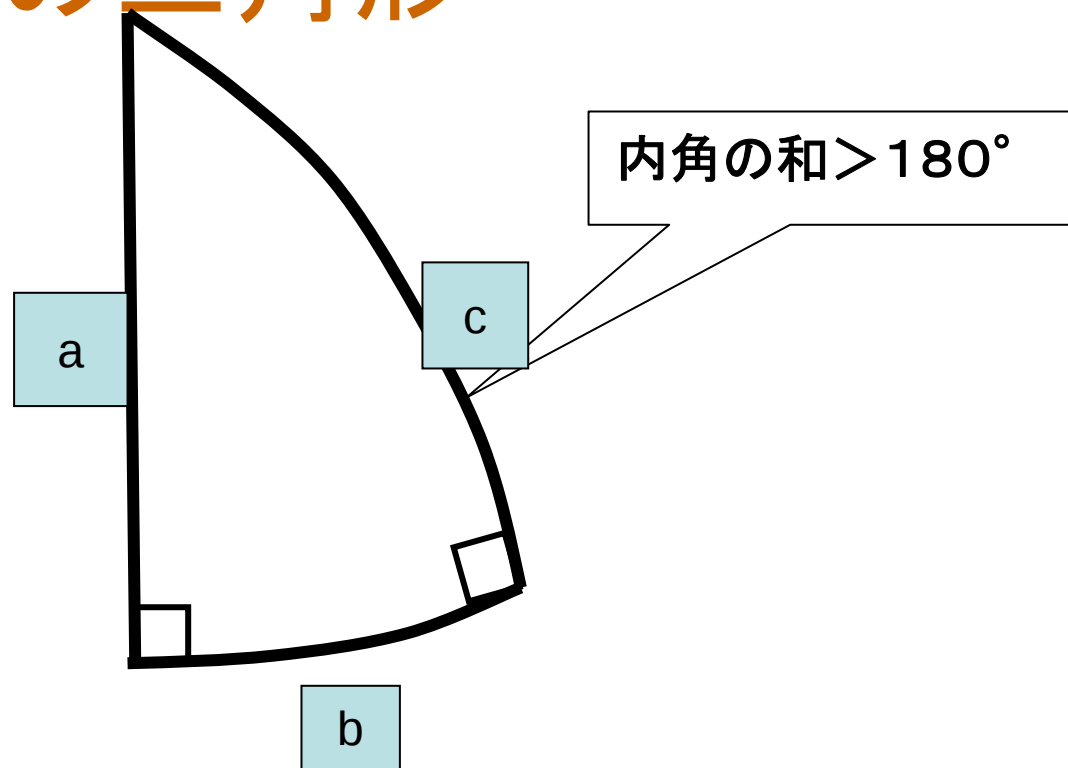
リーマン幾何学

- 「空間が曲がっている」
- 三角形の内角の和が 180° にならない。
- 面積＝底辺×高さ÷2が成り立たない。



局所的平面

球面の三角形

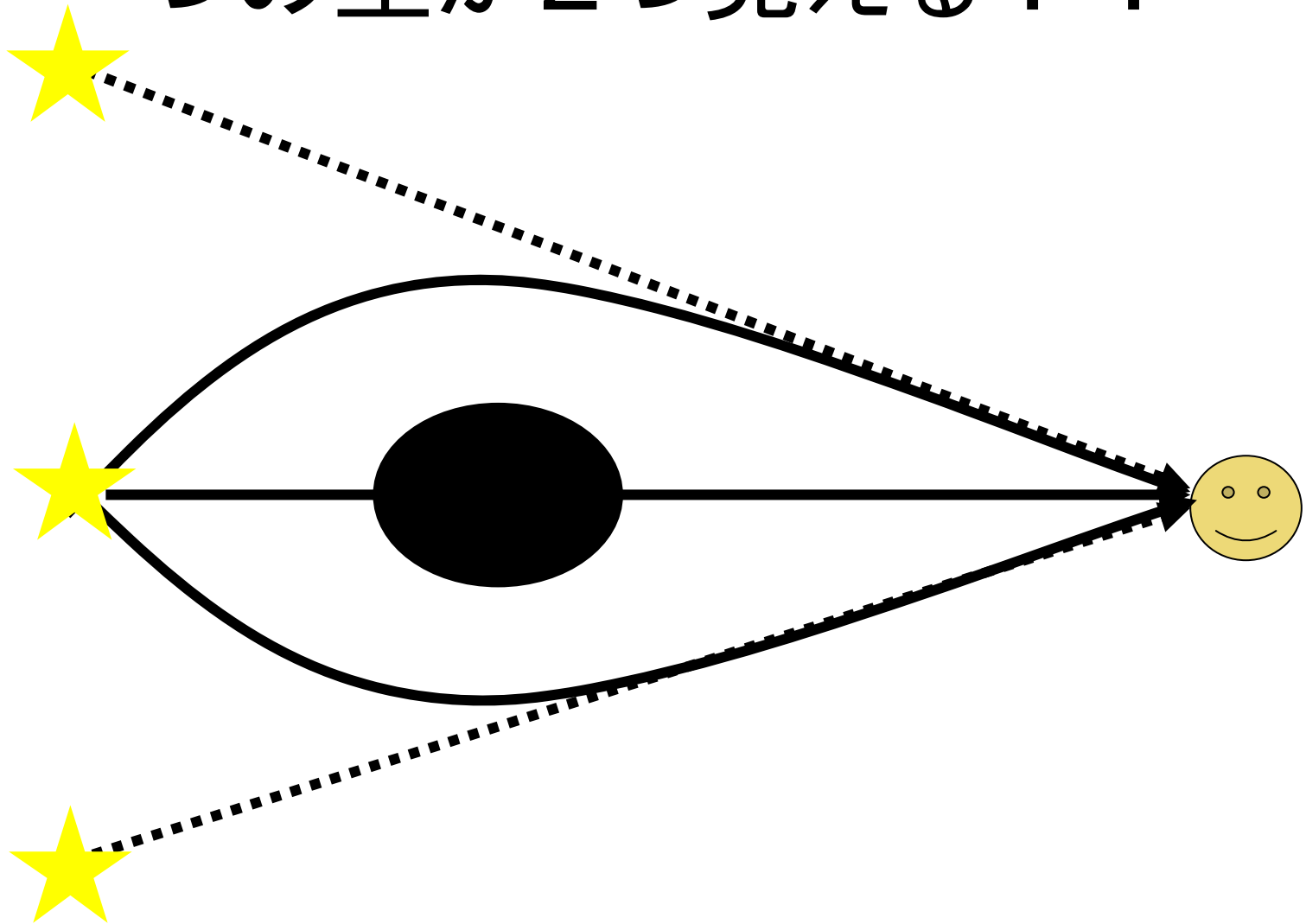


$$a=c$$

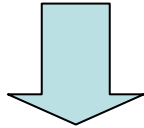
$$\therefore a^2=c^2 \quad a^2+b^2>c^2$$

ピタゴラスの定理が成り立たない！

一つの星が2つ見える！？

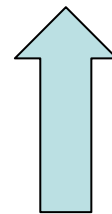


リーマン幾何学

- 「空間が曲がっている」
- 三角形の内角の和が 180° にならない。
- 面積＝底辺×高さ÷2が成り立たない。
- なぜ、空間が曲がるのか？

- 重力によって空間が曲がる。

ベクトル場の微分は、テンソルか？

$$\begin{aligned}\partial_\nu A_\mu(x) &\rightarrow \partial'_\nu A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho(x) \right) \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda A_\rho(x) + \left(\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \right) A_\rho(x)\end{aligned}$$



おつりが出てしまう。

クリストッフェルの三指標記号 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$

定義

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) T_{\mu\nu}$



解く

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} = 0$$

「は、リーマン接続係数、アフィン係数という。

共変微分

$$\nabla_{\nu} A_{\mu}(x) \equiv \partial_{\nu} A_{\mu}(x) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda}$$

反変ベクトルの共変微分

$$\nabla_{\nu} A^{\mu}(x) \equiv \partial_{\nu} A^{\mu}(x) + \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} A^{\sigma}$$

Γ は、リーマン接続係数、アフェイン係数という。

$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ の条件

恒等式

$$\partial'_{\nu} A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\lambda} A_{\rho}(x) + \left(\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right) A_{\rho}(x)$$

$$\nabla'_{\nu} A'_{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \left\{ \nabla_{\sigma} A_{\rho}(x) \right\}$$

テンソルの条件

$$\partial'_{\nu} A'_{\mu}(x') - \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} A'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \left\{ \partial_{\sigma} A_{\rho}(x) - \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} A_{\tau}(x) \right\}$$

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}(x) + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}$

$$(ds)^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

特殊相対論では、 η は定数。

$$(ds)^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}$$

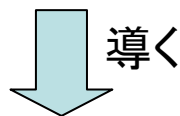
計量テンソルの共変微分

- リーマン幾何学上での平行移動:

$$A^\mu(x + \Delta x)_\parallel = A^\mu(x) - \Delta x^\nu \Gamma_{\lambda\nu}^\mu(x) A^\lambda(x)$$

- 平行移動ではベクトルのスカラー積は不変:

$$g_{\mu\nu}(x + \Delta x) A^\mu(x + \Delta x)_\parallel A^\nu(x + \Delta x)_\parallel = g_{\mu\nu}(x) A^\mu(x) A^\nu(x)$$

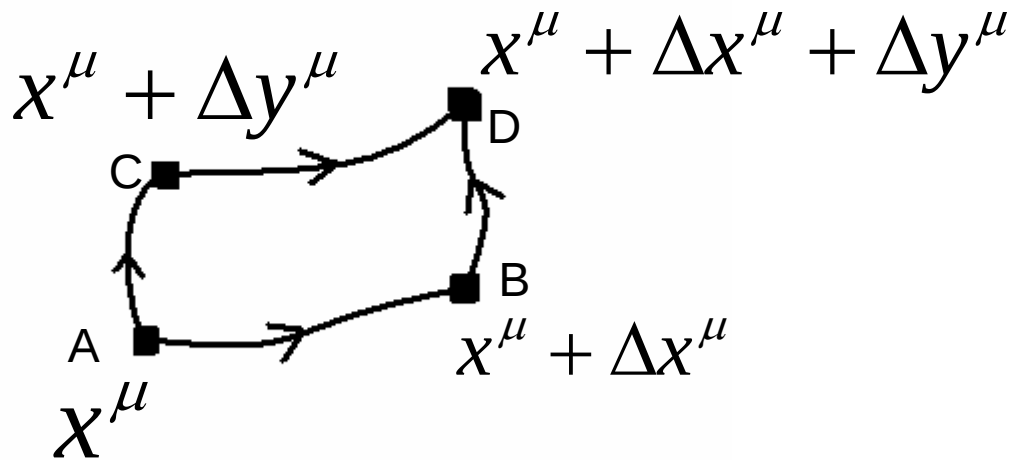


$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = 0$$

曲率

經路: $A \rightarrow B \rightarrow D$

經路: $A \rightarrow C \rightarrow D$



$$A_\mu(x + \Delta x)_\parallel = A_\mu(x + \Delta x) - \Delta x^\nu \nabla_\nu A_\mu(x)$$

$$A_\mu(x + \Delta y)_\parallel = A_\mu(x + \Delta y) - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x)$$

経路: A→B→D **曲率**

$$\begin{aligned}
 A_{\mu}(x + \Delta x + \Delta y)_{\parallel} &= A_{\mu}(x + \Delta x + \Delta y) - \Delta x^{\nu} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x + \Delta y) \\
 &\quad - \Delta y^{\lambda} \nabla^{\lambda} \left\{ A_{\mu}(x + \Delta x) - \Delta x^{\nu} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x) \right\} \\
 &= A_{\mu}(x + \Delta x + \Delta y) - \Delta x^{\nu} \nabla_{\nu} \left\{ \Delta y^{\lambda} \partial_{\lambda} A_{\mu}(x) + A_{\mu}(x) \right\} \\
 &\quad - \Delta y^{\lambda} \nabla_{\lambda} \left\{ \left\{ \Delta x^{\sigma} \partial_{\sigma} A_{\mu}(x) + A_{\mu}(x) \right\} - \Delta x^{\nu} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x) \right\} \\
 &= A_{\mu}(x + \Delta x + \Delta y) - \left(\Delta x^{\nu} + \Delta y^{\nu} \right) \nabla_{\nu} A_{\mu}(x) \\
 &\quad - \left(\Delta x^{\nu} \Delta y^{\lambda} + \Delta y^{\nu} \Delta x^{\lambda} \right) \partial_{\lambda} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x) + \Delta y^{\lambda} \Delta x^{\nu} \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} A_{\mu}(x)
 \end{aligned}$$

曲率

經路: $A \rightarrow C \rightarrow D$

$$\begin{aligned} A_\mu(x + \Delta y + \Delta x)_\parallel &= A_\mu(x + \Delta y + \Delta x) - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x + \Delta y) \\ &\quad - \Delta x^\lambda \nabla^\lambda \left\{ A_\mu(x + \Delta y) - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \right\} \\ &= A_\mu(x + \Delta y + \Delta x) - \Delta y^\nu \nabla_\nu \left\{ \Delta x^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) + A_\mu(x) \right\} \\ &\quad - \Delta x^\lambda \nabla_\lambda \left\{ \left\{ \Delta y^\sigma \partial_\sigma A_\mu(x) + A_\mu(x) \right\} - \Delta y^\nu \nabla_\nu A_\mu(x) \right\} \\ &= A_\mu(x + \Delta y + \Delta x) - \left(\Delta y^\nu + \Delta x^\nu \right) \nabla_\nu A_\mu(x) \\ &\quad - \left(\Delta y^\nu \Delta x^\lambda + \Delta x^\nu \Delta y^\lambda \right) \partial_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x) + \Delta x^\lambda \Delta y^\nu \nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu(x) \end{aligned}$$

曲率

$$A_{\mu}^{\overset{\text{A}\rightarrow\text{B}\rightarrow\text{D}}{(x+\Delta x+\Delta y)}}_{\parallel}-A_{\mu}^{\overset{\text{A}\rightarrow\text{C}\rightarrow\text{D}}{(x+\Delta y+\Delta x)}}_{\parallel}=\Delta x^{\nu}\Delta y^{\lambda}\left(\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}-\nabla_{\nu}\nabla_{\lambda}\right)A_{\mu}(x)$$

$$\left(\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}-\nabla_{\nu}\nabla_{\lambda}\right)A_{\mu}(x)\equiv-R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}A_{\sigma}(x)$$

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}$$

曲率テンソル

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\lambda}\equiv\partial_{\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}-\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}+\Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$$

リッチのテンソル

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = R_{\nu\mu}$$

スカラー曲率

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\sigma\mu\rho\nu}$$

アインシュタイン・テンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

ビアンキ恒等式

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$$

エネルギー運動量テンソル

$$T^{\mu\nu}(x) = T_{\text{matt}}^{\mu\nu}(x) + T_{EM}^{\mu\nu}(x)$$

$$T_{\text{matt}}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\det[g]}} \sum_{i=1}^N m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^\mu(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^\nu(\tau_i)}{d\tau_i} \delta^4(x - x_i(\tau_i))$$

$$T_{EM}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \right)$$

連続の式 (保存の式)

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

エネルギーの保存

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$$

運動量の保存

重力方程式を作ろう。

材料

- 時空間を決めるテンソル:

アインシュタイン・テンソル $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$

- ビアンキ恒等式
- 物理的な保存の法則

$\Rightarrow \nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$

$\Rightarrow \nabla_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0$

もしかして...

$$G^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu}$$

等価原理

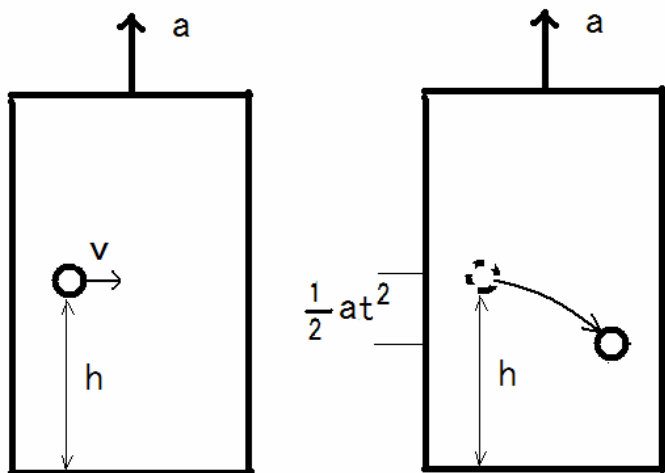
- 重力場で自由落下する系は、重力場のない系と同じ物理法則がなりたつ。
- フリーホール: ボックスの外を見ることができなければ、どの方向に落下しているのかわからない。

等価原理

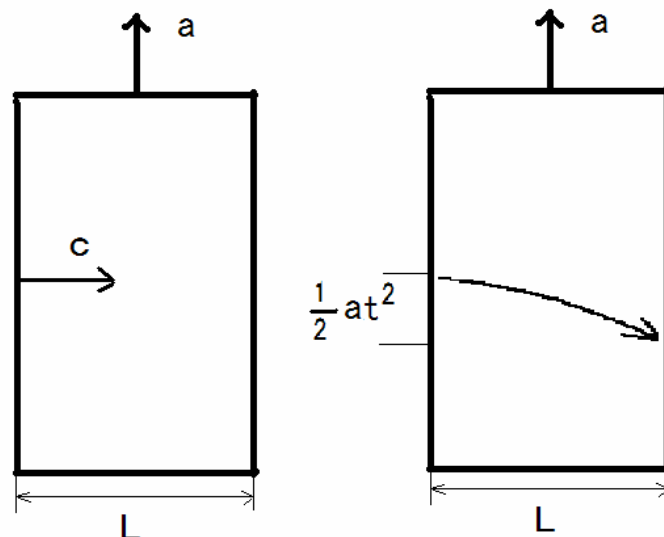
- 慣性質量と重力質量は本来同一のもので、加速度によって生じる見かけの力と重力とは原理的に区別できないものである。
- 適当な基準系を採用すれば、任意の世界点の近傍のごく小さい領域で重力の影響を消し去ることができる。

等価原理

- 全ての物理法則は、任意の座標系において、いつも同じ形で表される。



ボックスが加速度 a で上昇している。
内部のボールを加速度に垂直に
速度 v で放すと、放物運動をする。
これは、重力によるものと識別できるか？

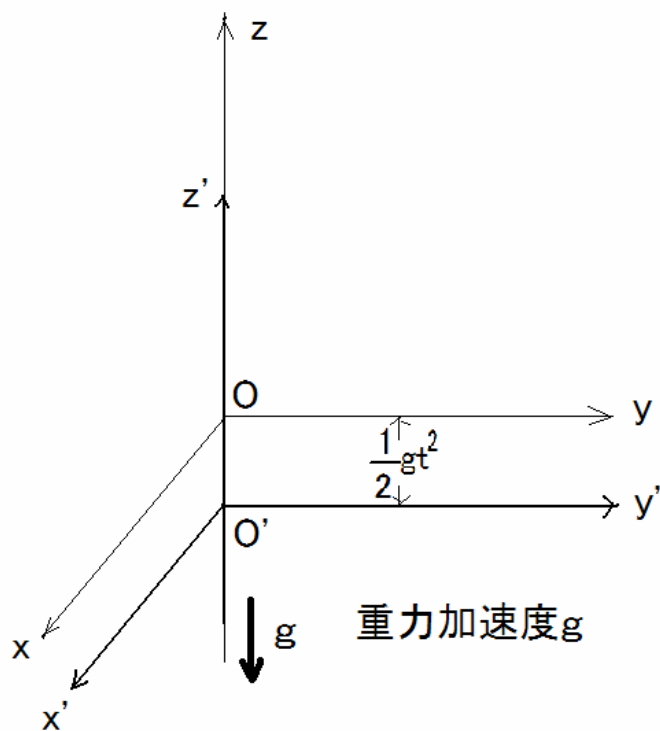


光の場合も同様に考えることができる。
→ 光も落下する。

$$t=L/c$$

重力のない系とある系

- 重力のない系 (局所慣性系)
- 重力のある系



固有時の微分: $d\tau$, 原点付近 $(x', y', z') = (0, 0, 0)$ $\therefore z' = 0$,

を代入すれば、

2次形式

計量テンソル(メトリック): $g_{\mu\nu}$

Φ は、単位質量当たりの重力ポテンシャル

比例定数 κ の決定

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \kappa T^{\mu\nu}$$

$$T^{00} \approx \rho c^2$$

$$g_{\mu\nu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \kappa T^{\mu\nu}$$

$$R^{00} \approx R_{00}$$

$$\therefore -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} \kappa c^2 \rho = \kappa c^2 \rho$$

$$\therefore \nabla^2 \Phi = -\frac{c^4}{2} \kappa \rho$$

万有引力のポアソン方程式：

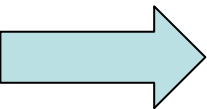
$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\kappa = -\frac{8\pi G}{c^4}$$

定

$$c^2 \rho$$

$$+\frac{1}{2} \kappa c^2 \rho$$



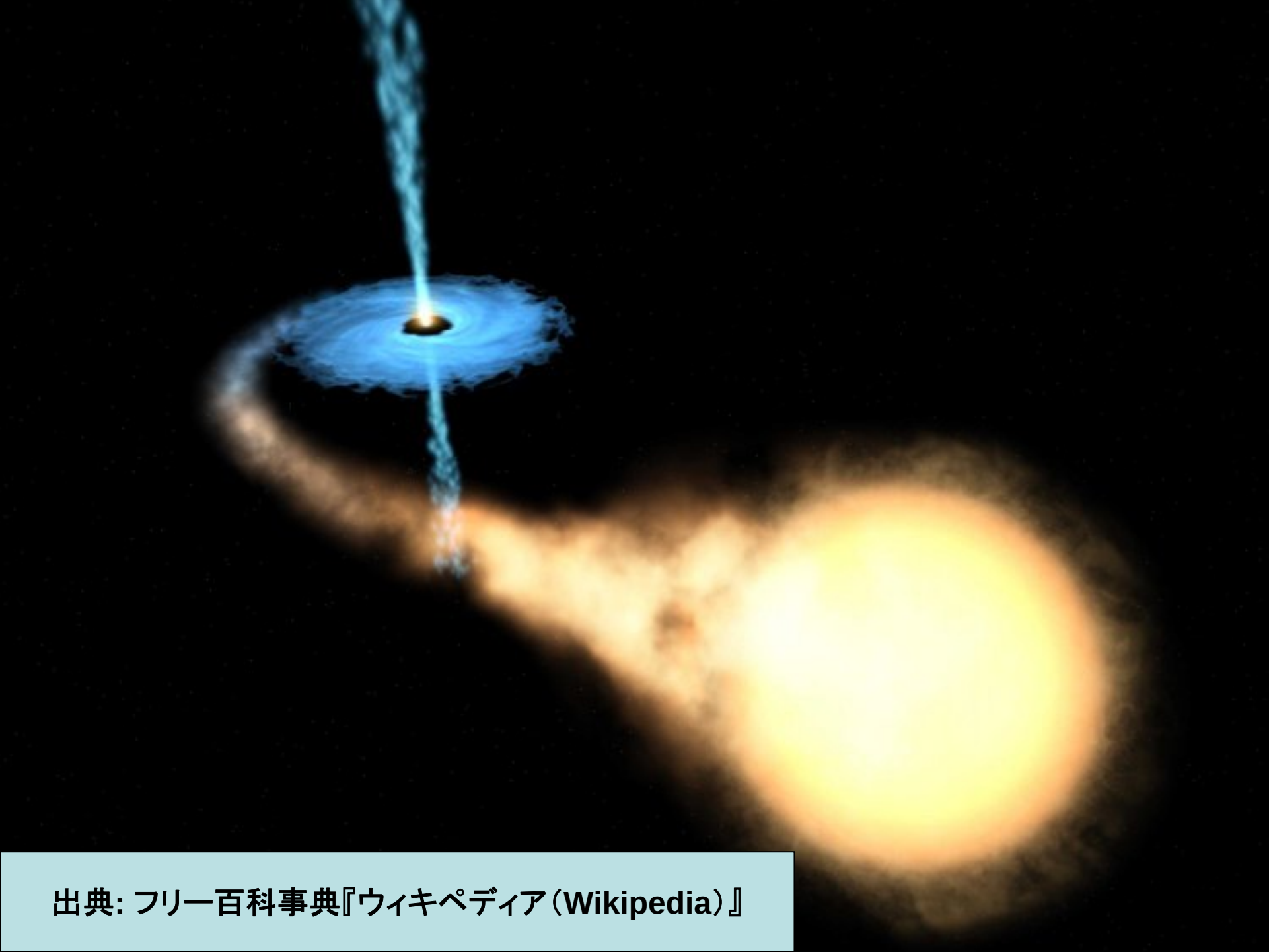
アインシュタインの重力方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

計量テンソルを決定する方程式＝重力方程式

重力方程式の解

- 一つの解として、「ブラック・ホール」解がある。



出典: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

重力方程式の解

- 特別な解として、「ブラック・ホール」解
- 宇宙が膨張するか収縮するかを予想
 - 膨張する宇宙
 - ビッグバン
 - 宇宙の年齢(137億年)
 - インフレーション宇宙(佐藤理論)
- 宇宙は、無限なのか有限なのかを予想
 - 閉じた宇宙

まとめ

- 特殊相対性理論
 - ミンコフスキー時空間(4次元)
 - ユークリッド幾何学(平らな時空)
- 一般相対性理論
 - リーマン幾何学(歪んだ時空)
- 重力方程式(アインシュタイン方程式)
 - ブラックホール、ビッグバン