(スケートのスピン)skatingspin-qa030209.tex

回転しているスケーターが腕を縮めると回転が速くなる。簡単のために、腕を伸ばしているスケーターを長さ ℓ の棒の両端に質量 m の質点が 2 個ついた回転子というモデルで表す。棒と回転軸の質量を無視する。腕を縮めたスケーターは長さが $\ell/2$ の回転子で表す。腕を縮めるには回転による遠心力に逆らって力を出さないといけない。しかし、この力の方向と回転子の重心Gから見た質点の位置ベクトルの方向は平行であるから、この力による力のモーメントはゼロになり、角運動量は保存される。以下の問いに答えよ。

1. 腕を伸ばしているときの慣性モーメント I_0 と縮めているときの慣性モーメント I_1 を求めよ。
2. 腕を伸ばしているときの角速度 ω_0 として、腕を縮めているときの角速度 ω_1 を求めよ。
3. 腕を伸ばしているときの運動エネルギー T_0 と縮めているときの運動エネルギー T_1 を求め, 腕を半分に縮めると運動エネルギーは何倍になるか述べよ。
4. 遠心力に逆らってする仕事 W を計算し、運動エネルギーの変化と比較せよ。

(解答例)

1. 慣性モーメントの定義により

$$I_0 = 2\times m(\frac{\ell}{2})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2, \tag{1}$$
$$I_1 = 2\times m(\frac{\ell}{4})^2 = \frac{1}{8}m\ell^2. \tag{2}$$

2. 角運動量が保存されるので

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1 \to \omega_1 = \frac{I_0}{I_1}\omega_0 = 4\omega_0. \tag{3}$$

3. 題意より

$$T_0 = 2\times\frac{1}{2}m(\frac{\ell}{2}\omega_0)^2 = \frac{1}{4}m\ell^2\omega_0^2, \tag{4}$$
$$T_1 = 2\times\frac{1}{2}m(\frac{\ell}{4}\omega_1)^2 = \frac{1}{16}m\ell^2\omega_1^2 = m\ell^2\omega_0^2. \tag{5}$$

運動エネルギーは 4 倍に増加した。

4.

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\ell/2}^{\ell/4} 2mr\omega^2\ dr \ (\text{角運動量保存}\ 2m(\frac{\ell}{2})m(\frac{\ell}{2}\o, ega_0)\omega_0 = 2mr^2\omega) \\ &= -\int_{\ell}^{\ell/2} 2m(\frac{\ell^2\omega_0}{4})^2\frac{1}{r^3}\ dr = \frac{m\ell^4\omega_0^2}{16}[\frac{1}{r^2}]_{\ell/2}^{\ell/4} \\ &= \frac{3}{4}m\ell^2\omega_0^2 = T_1 - T_0 \end{aligned} \tag{6}$$

このように、遠心力に逆らってする仕事と運動エネルギーの変化が等しい。(なされた仕事と運動エネルギーの変化が等しいという仕事エネルギー定理の実例である。)