

1 ラグランジュ方程式

ニュートンの運動方程式はベクトルで表現すれば、単純に見えるが、選択する座標により、具体的な運動方程式がかなり異なった形になる。運動方程式を書き下す際、力の向きについて注意が必要な場合もある。また、拘束条件がある場合には運動方程式とは独立に注意が必要である。ここでは、このような問題を解決できるラグランジュ方程式という古典力学の別の表現を考えてみよう。

一般に、直交直線座標（デカルト座標）により N 個の粒子からなる多粒子系を記述するときには、

$$\text{座標（位置）} : x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N \quad (1)$$

$$\text{速度成分} : \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, \quad (2)$$

$$\text{運動方程式} : m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{ix}, m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{iy}, m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = F_{iz}, \quad (3)$$

$$\text{運動エネルギー } K \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (4)$$

が用いられる。 m_i は i 番目の粒子の質量、 $\{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\}$ は働く力の合力の、それぞれ x, y, z 成分である。以下では煩雑さをさけるために、それぞれ通し番号をつけることにする。

$$\text{座標（位置）} : x_1, x_2, \dots, x_{3N} \quad (5)$$

$$\text{速度成分} : \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N} \quad (6)$$

$$K \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad (7)$$

例えば、新しい x_3 はもとの z_1 であり、新しい $\dot{x}_{3N-1}$ はもとの $\dot{y}_N$ のことである。

直交座標系では、運動量 $P_i = m\dot{x}_i$ 、運動エネルギー K 、力 F_i の間には

$$P_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, 3N), \quad (8)$$

$$\dot{P}_i = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3N) \quad (9)$$

という関係がある。

ここで、多粒子系を記述する独立な変数として、デカルト座標に代わって、一般化座標（generalized coordinate） $\{q_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ を導入する。一般に、系には拘束条件（ k 個とする）が関数 f_i として与えられているとすると

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{3N}; t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k; k < 3N). \quad (10)$$

この変数の数 n はもとの変数の個数 $3N$ よりも少なく、 $n = 3N - k$ となる。一般には、もとの変数は一般化座標と時間の関数として表される。

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (11)$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (12)$$

...

$$x_{3N} = x_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n; t). \quad (13)$$

ここで、 $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ は時間 t の関数であるが、 $q_1, q_2, \dots, q_n$ が t の関数なので、これらを通じて間接的に t に依存しているとみなすのである。: t という記号は、一般化座標の選び方により、時間について直接に (陽に) 依存する場合があることも考慮した。

ここでもとの座標 ($x_i, i = 1, 2, \dots, 3N$) を t で微分すると、($q_j, j = 1, 2, \dots, n$) も t の関数なので、

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &\equiv \frac{dx_i}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \dot{x}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t).\end{aligned}\quad (14)$$

となる。($\dot{q}_j \equiv dq_j/dt$)。この式の両辺の独立変数を $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t$ とみなして、両辺を $\dot{q}_j$ で偏微分すると

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (15)$$

が得られる。

ここで、一般化座標 q_j に対応する一般化運動量 (generalized momentum) p_j を次のように定義して、(8), (15) 式を用いると

$$p_j \equiv \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

$$= \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} P_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (17)$$

が得られる。ここで、両辺を t で微分して、(9) (8) 式を用いると

$$\begin{aligned}\frac{dp_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{3N} \left[\dot{P}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3N} \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right)\end{aligned}\quad (18)$$

が得られる。最後の式では t と q_j についての微分の順序を入れ替えてよいこと

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (19)$$

を使った。

1. 力が保存力である場合：

このとき、力の成分はポテンシャル $U(x_1, x_2, \dots, x_{3N})$ と次の関係

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_{3N}) = - \frac{\partial U(x_1, x_2, \dots, x_{3N})}{\partial x_i} \quad (20)$$

がある。ここで、一般化座標 q_j に対応する一般化力 (generalized force) を定義すると

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (21)$$

のように、(20) 式と対応する関係式が得られる。この式を (18) 式に代入すると

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} (K - U) \quad (22)$$

となる。ここで次のようにラグランジアン (Lagrangian, ラグランジュ関数) L を定義する。

$$L \equiv K - U. \quad (23)$$

一般に、 K が $q_j, \dot{q}_j, t$ の関数であり、 U が q_j の関数であるから、 L は $q_j, \dot{q}_j, t$ の関数である。すなわち、

$$L(q_j, \dot{q}_j; t) = K(q_j, \dot{q}_j; t) - U(q_j). \quad (24)$$

$\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$ であるから、一般化運動量 p_j をあらためて次のように定義する。

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (25)$$

ここで (22) (23) (25) 式により、ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (26)$$

が得られた。

2. 力が保存力と非保存力の和になる場合：

力が保存力 ($-\partial U / \partial q_i$) と非保存力 (Q'_j) からなるとき、

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q'_j. \quad (27)$$

このときにはラグランジュ方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

特に、力が、非保存力 (F'_i) として、速度に比例する抵抗力 (または摩擦力) をもち、

$$F'_i = -k_i \dot{x}_i \quad (29)$$

のように表わされるとする。ここで (Rayleigh の) 散逸関数

$$D \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \dot{x}_i^2 \quad (30)$$

を定義すると、抵抗力は

$$F'_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}. \quad (31)$$

と表わされる。抵抗力に対する一般化力 Q'_j は

$$\begin{aligned} Q'_j &= \sum_{i=1}^{3N} F'_i \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \cdot \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ \rightarrow Q'_j &= -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (32)$$

となる。したがって、抵抗力がある場合のラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (33)$$