

1 不変性と保存法則

1.1 ラグランジアンの不変性と保存法則

ラグランジアン L は一般化座標 $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 、その速度 $\dot{q}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ に依存する。 $q_i, \dot{q}_i$ は一般に時間 t に依存する。従って、ラグランジアンは $q_i, \dot{q}_i$ を通じて間接的に (= 陰に、非明示的に) 時間に依存する。さらに、摩擦力や系外からの強制力などが働く場合には、時間 t にあらわに (= 明示的に) 依存する。すなわち、一般には $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t)$ と表わすことができる。この場合、ラグランジアンの時間微分は次のようになる。

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{dq_i}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \sum_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (1)$$

1. 時間の一様性と力学的エネルギー保存則:

時間の一様性のために、孤立系のラグランジアンは時間に陽に依存することはないので、時間微分は次のようになる。

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{dq_i}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \sum_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (2)$$

右辺の第一項の導関数をラグランジュ方程式にしたがって、書きなおすと

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \ddot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (3)$$

書きなおすと

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (4)$$

従って、次の量

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L (\equiv E) \quad (5)$$

は孤立系の運動に際して、不変である。孤立系または一定の外場の中の粒子のラグランジアンは $L = K(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$ の形をしていて、かつ $K(q_i, \dot{q}_i)$ は $\dot{q}_i$ については2次式なので、

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = 2K. \quad (6)$$

この値を代入して、

$$E = K(q_i, \dot{q}_i) + U(q_i) \quad (7)$$

となる。この量 E はエネルギー (力学的エネルギー) と呼ばれる。 $K(q_i, \dot{q}_i)$ や $U(q_i)$ のそれぞれは時間的に変化するが、和は時間的に一定となる。(摩擦がある場合には、

ラグランジアンは時間に陽に依存し、系外にエネルギーが散逸することになる。)

2. 空間の一様性と運動量保存則:

ラグランジアンが一般化座標のどれかがあらわに含まれない場合 (q_j) があるとき、この一般化座標は循環座標 (cyclic coordinate) と呼ばれ、それに対応する一般化運動量 (p_j) は保存される。

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \rightarrow p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{constant}. \quad (8)$$

この事実の物理的な意味を具体的に調べてみよう。ここで後の議論の便利さのために、ベクトル微分演算子 (gradient) に対して次の記号を導入する。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (9)$$

空間が一様であれば、孤立系の力学的性質は系全体としての空間内の任意の平行移動に対して不変である。これに対応して無限小の変位ベクトル ε を考え、 $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \varepsilon$ という平行移動に対して、ラグランジアンが不変にとどまることを要請しよう。速度を変えずに座標だけを無限小変化させるときの L の変化は

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \varepsilon \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (10)$$

ここで、和はすべての粒子にわたってとる。任意の ε に対して $\delta L = 0$ でなければならないから、

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

したがってラグランジュ方程式によって

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

このように、孤立系においては、ベクトル量

$$\mathbf{P} \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \quad (13)$$

が運動の際、保存される。このベクトル $\mathbf{P}$ は系の (全) 運動量と呼ばれる。

3. 空間の等方性と角運動量保存則:

次に、空間の等方性に起因する保存法則を考える。等方性とは、孤立した力学系の性質が空間内での系全体としての任意の回転に対して変化しないということを意味する。系の無限小回転に対してラグランジアンが不変であることを要請する。

ここで、無限小回転のベクトル $\delta \phi$ を導入する。このベクトルの大きさは回転角 $\delta \phi$ に等しく、その向きは回転軸に一致する。($\delta \phi$ と同じ向きを向いた右ねじのまわる向きが回転の向きに一致するように選ぶ。) この無限小回転ベクトルに起因する位置ベクトルの変化 $\delta \mathbf{r}$ は次のように表わされる。

$$\delta \mathbf{r} = \delta \phi \times \mathbf{r}. \quad (14)$$

ここで、 $\times$ 記号はベクトル積 (外積) を意味する。系の回転に際しては、位置ベクトルの向きが変わるだけでなく、全ての粒子の速度ベクトルも変化する。その際には、全てのベクトルが同じ法則にしたがって変換される。速度ベクトルの変化分は (静止した座標系で記述して)

$$\delta \mathbf{v} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}. \quad (15)$$

これらの表現を、回転に対してラグランジアンが不変という条件に代入する。

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta \mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta \mathbf{v}_a \right). \quad (16)$$

ここで、 $\cdot$ 記号はベクトルのスカラー積 (内積) を意味する。 $\partial L / \partial \mathbf{v}_a$ は定義により一般化運動量 $\mathbf{p}_a$, $\partial L / \partial \mathbf{r}_a$ はラグランジュ方程式により、 $\dot{\mathbf{p}}_a$ となるので

$$\sum_a (\dot{\mathbf{p}}_a \cdot [\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a \cdot [\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}_a]) = 0. \quad (17)$$

ここで、任意のベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ に対する三重積について循環置換

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{A}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \quad (18)$$

を用いて、 $\delta \boldsymbol{\phi}$ をくくり出すと

$$0 = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \{ \sum_a ([\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] + [\mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a]) \} = \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a]. \quad (19)$$

ここで、 $\delta \boldsymbol{\phi}$ は任意であるから

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = 0 \quad (20)$$

でなければならない。すなわち、孤立系の運動においてはベクトル量

$$\mathbf{L} \equiv \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] \quad (21)$$

が保存される。この $\mathbf{L}$ は系の角運動量と呼ばれる。