

(オイラー方程式の導出)

剛体についての次の問いに答えよ。

1. 剛体の角運動量ベクトルを L , 外力のモーメントベクトルを N として、剛体の回転運動の方程式を記せ。
2. この方程式を角速度ベクトル ω により回転する座標系 ($O-x'y'z'$ 系) において表わせ。
ただし、回転座標軸方向の単位ベクトルを $\{e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$ とする。
3. この回転座標系を慣性主軸系 (1,2,3 軸) として選び、オイラー方程式を導け。

(解答)

1. 回転の運動方程式は角運動量ベクトルの時間変化率が力のモーメント (またはトルク) に等しいと表わされるので

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (1)$$

となる。

2. 回転系におけるベクトルの時間変化率はベクトルの成分だけの時間微分 (= 回転系におけるみかけの変化率) と座標軸の回転による変化率との和になるので、

$$\left[\frac{dL_{x'}}{dt} e_{x'} + \frac{dL_{y'}}{dt} e_{y'} + \frac{dL_{z'}}{dt} e_{z'} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \quad (2)$$

3. 慣性主軸系においては慣性テンソル $\{I_{ij}\}$ が対角化され、主慣性モーメント $\{I_1, I_2, I_3\}$ となる。その結果、角運動量の慣性主軸成分が $\{L_1 = I_1\omega_1, L_2 = I_2\omega_2, L_3 = I_3\omega_3\}$ となるので、剛体に対するオイラー方程式は

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1, \quad (3)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2, \quad (4)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3. \quad (5)$$

となる。