関数のテイラー展開とその応用（filename=taylorexpansion070607.tex）

1　定義

関数 $f(x)$ の点 $x=a$ 付近におけるテイラー展開

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{''}(a)(x-a)^2 + \cdots \tag{1.1}$$

関数 $f(x)$ の点 $x=0$ 付近におけるテイラー展開

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{1}{2!}f^{''}(0)x^2 + \cdots \tag{1.2}$$

2　よく使用される関数のテイラー展開

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{1}{2!}k(k-1)x^2 + \cdots \ (|x|<1), \tag{2.1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.2}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \tag{2.4}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \ (-1<x\le 1), \tag{2.5}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots, \tag{2.6}$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots, \tag{2.7}$$

$$\cosh x = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots. \tag{2.8}$$

3　テイラー展開の使用例、応用例

1. <u>近似式：x が十分小さい場合</u>

$$(1+x)^k \approx 1 + kx + \frac{1}{2!}k(k-1)x^2, \tag{3.1}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2, \tag{3.2}$$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \tag{3.4}$$

$$\log(1+x) \approx x-\frac{1}{2}x^2, \tag{3.5}$$
$$\tan x \approx x+\frac{1}{3}x^3, \tag{3.6}$$
$$\sinh x \approx x+\frac{1}{3!}x^3, \tag{3.7}$$
$$\cosh x \approx x+\frac{1}{2!}x^2. \tag{3.8}$$

2. 質点力学：つりあい点の近傍における安定性の判定と安定な点の周りの（近似的な）単振動の固有振動
ある（1 次元）力学系において、力 $F(x)$ が保存力でポテンシャル $U(x)$ により、$F(x) = -dU/dx$ と表される場合を考える。ある点 $x = a$ において、$U'(a) = 0$ ならば、ここでは力がゼロか、複数の力の合力がゼロでつりあっているとみなせる。このときポテンシャル $U(x)$ を点 $x = a$ のまわりにテイラー展開し、第 3 項まで近似できるとする。

$$\begin{aligned} U(x) &\approx U(0)+U'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}U''(a)(x-a)^2, &(3.9)\\ &\approx U(0)+\frac{1}{2!}U''(a)(x-a)^2. &(3.10)\end{aligned}$$

ポテンシャルの定数項は力と運動には寄与しない。ここで、2 次微分係数 $U''(a)$ の値が正ならば、ポテンシャル曲線 $U(x)$ は下の凸であり、この点では安定である。このとき、第 3 項はつりあい点 $x = a$ の周りの, $U''(a)$ の値に等しいバネ定数をもつ、弾性による位置エネルギーと等価になり、粒子の質量が与えられれば、単振動の角振動数 ω や周期 T が求まる。

3. 数値計算における近似式
数値計算では、点 a における関数の値と微分係数の値が既知であるとして、少し離れた点 x における関数の値 $f(x)$ を近似的に求めるために次の近似的関係式を使用することが多い。

$$f(x) \approx f(a)+f^{'}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{''}(a)(x-a)^2. \tag{3.11}$$

4. 純虚数の指数関数についてのオイラーの公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta \ (\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}, \mathrm{i}^2=-1) \tag{3.12}$$

証明：

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= 1+\mathrm{i}\theta+\frac{1}{2!}(\mathrm{i}\theta)^2+\frac{1}{3!}(\mathrm{i}\theta)^3+\frac{1}{4!}(\mathrm{i}\theta)^4+\cdots \\ &= \left[1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4+\cdots\right]+\mathrm{i}\left[\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5+\cdots\right] \\ &= \cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta. &(3.13)\end{aligned}$$

5. オイラーの公式の応用による三角関数の和差と積の公式の導出
二つの角度を持つオイラー公式の積を考える:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}B} = [\cos A+\mathrm{i}\sin A]\times[\cos B+\mathrm{i}\sin B]. \tag{3.14}$$

この両辺を比較する。まず、左辺は

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)} = \cos(A+B) + \mathrm{i}\sin(A+B). \tag{3.15}$$

次に、右辺は

$$\begin{aligned}&[\cos A + \mathrm{i}\sin A] \times [\cos B + \mathrm{i}\sin B] \\ &\qquad = (\cos A\cos B - \sin A\sin B) + \mathrm{i}(\sin A\cos B + \sin B\cos A)\end{aligned} \tag{3.16}$$

これらの両辺の実数部と虚数部を比較すると

$$\cos(A+B) = (\cos A\cos B - \sin A\sin B), \tag{3.17}$$

$$\sin(A+B) = (\sin A\cos B + \sin B\cos A). \tag{3.18}$$

三角関数の和差と積の公式が求まる。

6. オイラーの公式の応用による倍角の公式、3 倍角の公式の導出
オイラー公式の n 乗の場合を考える:

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = [\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)]^n. \tag{3.19}$$

ここで

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \\ &= \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\end{aligned} \tag{3.20}$$

が成立する。まず、$n = 2$ の場合に, 二つの表現における実数部分と虚数部分をそれぞれ比較すると、倍角の公式が得られる：

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{3.21}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{3.22}$$

次に、$n = 3$ の場合に, 二つの表現における実数部分と虚数部分をそれぞれ比較すると、3 倍角の公式が得られる：

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \tag{3.23}$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \tag{3.24}$$

7. $\cos, \sin$ などの関数に使用される変数は無次元であること。
加減ができる物理量は同じ次元に限られる。ティラー展開において変数の級数展開の係数は無次元の定数であるから、関数に使用される変数は無次元であるべきことがわかる。

参考文献