偏微分とその応用

目次

複数の独立変数の関数

偏微分とは何か？

全微分 とは何か

物理例：保存力とそのポテンシャル

Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)

Filename=Partial-diff080612.ppt

複数の独立変数の関数

２つの変数x,y に対して、ある値fを対応させる規則が定められている場合。変数fを２変数x,yの関数という。２つの変数の値の組（x,y）に対する関数の値をf(x，y)と表す。f=f(x,y)という書き方をする場合もある。

数学における実例：

$$f(x,y) \equiv x^2 + xy - y^2 + 1$$

$$\rightarrow f(1,-1) = 1^2 + 1 \times (-1) - (-1)^2 + 1 = 0,$$

$$\rightarrow f(2,\ 1) = 2^2 + 2 \times 1 - 1^2 + 1 = 6.$$

物理学における実例：

理想気体nモルの絶対温度T，体積V，圧力Tの場合の状態方程式

$$PV = nRT \quad (R: \text{気体定数})$$

$$\rightarrow P = \frac{nRT}{V}; \quad P = P(V,T)$$

偏微分とは何か？

2変数の関数f(x,y)は、他の変数を「固定」すれば、すなわち、他の変数を「一定」とみなせば、1変数の関数と見なせるから,「1つの変数の微分」を考えることができる！

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \left(\text{または} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \right)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \left(\text{または} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \right)$$

これを**偏微分（偏微分係数、(partial differential) ）**という。

高階の偏微分係数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\equiv f_{xx}), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\equiv f_{yx}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\equiv f_{xy}), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\equiv f_{yy}),$$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$と$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$が存在し、ともに連続であるならば

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

応用例

例1：$r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{x}{r}.$$

$$\rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

例2：$r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$$

$$= -\frac{x}{r^3}.$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}.$$

スカラー関数の勾配(gradient)

スカラー関数 $\phi = \phi$(x,y,z)

ベクトル微分演算子∇

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \vec{\mathrm{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathrm{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathrm{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

スカラー関数の勾配

$$\vec{\nabla}\phi \equiv \mathrm{grad}\phi \left(= \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \right)$$

$$\equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \vec{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= \vec{\mathrm{e}}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{\mathrm{e}}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{\mathrm{e}}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

全微分 とは何か

複数変数の関数の増分（inclement, 変化量）

$$\Delta f \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$
$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$
$$\approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y+\Delta y)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} \Delta y$$

テーラー展開を用いる！

$$\approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} \Delta x \Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} \Delta y$$

高次項

複数変数の関数の変化の主要部分としての全微分（total differential）

$$df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} \Delta y$$

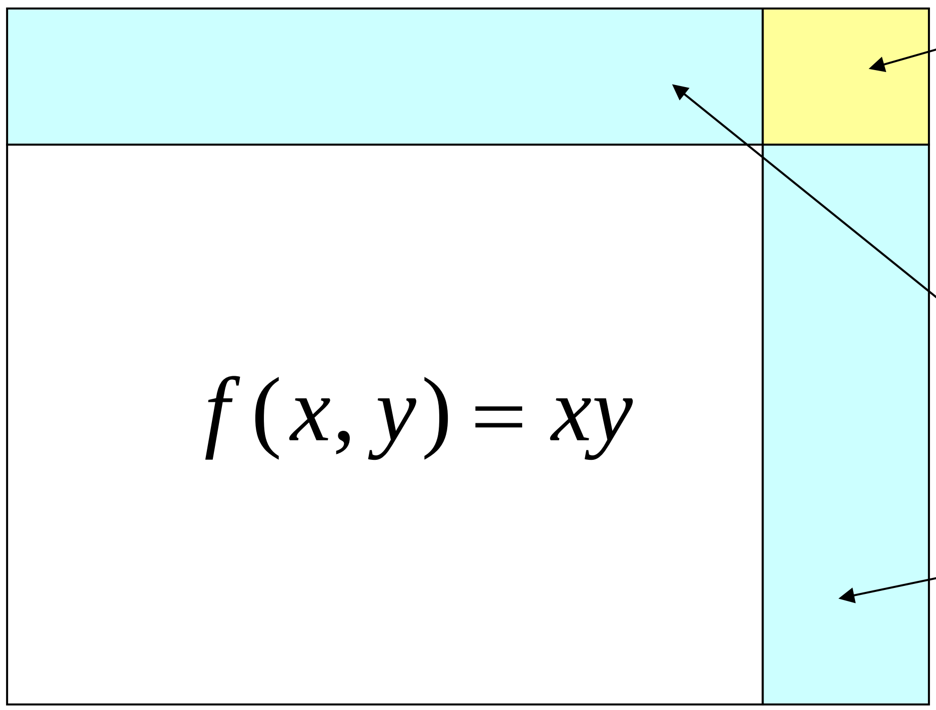
独立変数に対して

$$\Delta x = dx,\ \Delta y = dy$$

$$\Rightarrow df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} dy$$

x方向の変化　　Y方向の変化

関数 f(x,y)=xyの増分Δfと全微分df



増分と全微分の差

$$\Delta f - df$$

全微分

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

$$= ydx + xdy$$

（＊参考：全微分になるための必要十分条件）

変数x,yの関数P(x,y)とQ(x,y)からなる

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

が関数 $f(x,y)$ の全微分であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

である。このとき、$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

を完全微分であるという。

3変数(x,y,z)の関数 f=f(x,y,z)の場合

関数 $f = f(x, y, z)$の全微分

$$df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y,z)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y,z)} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x,y,z)} dz$$

$\vec{\nabla}\phi$は$\phi(x, y, z) = \mathrm{constant}$の面(等ポテンシャル面）に垂直

Φの全微分をとると

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz$$

$$= \vec{\nabla}\phi \bullet d\vec{r}$$

等ポテンシャル面を考える＝(dx,dy,dz)を等ポテンシャル面上に限定する。

$$d\phi = 0$$

よって、

$$\vec{\nabla}\phi \bullet d\vec{r} = 0$$

すなわち、等ポテンシャル面上に限定された変位ベクトルと勾配の向きは垂直である。

物理例；保存力とのそのポテンシャル

(3次元系における）保存力とは、その行う仕事が経路に依存しない力である。

保存力；重力、電気力など

$$\vec{F}^{c}(\vec{r})$$

ポテンシャル

$$U(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}'_0}^{\vec{r}} \vec{F}^{c}(\vec{r}')\bullet d\vec{r}'$$

ポテンシャルから保存力の各成分が求まる。

$$\vec{F}^{c}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

$$= \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

保存力の向きは、その等ポテンシャル面に垂直で、かつ減少する向きである。