行列 $A(=A_{ij}\ ,\ n\times n)$ がエルミート (Hermite) であるとは、その行列が

$$A_{ij}=A^*_{ji}, \qquad \text{(complex conjuge, 複素共役)} \tag{1}$$

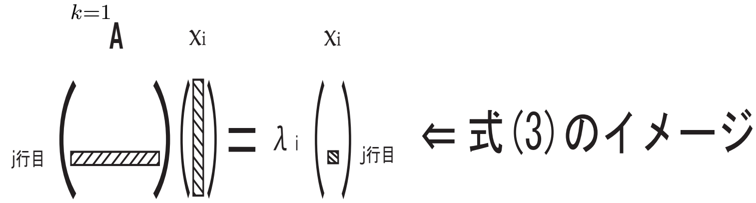
を満たすことである。記号的には

$$A=A^\dagger. \qquad (\dagger\text{: dagger ダガー、(短剣の意味)}) \tag{2}$$

と記す。このとき、エルミート行列の固有値は必ず実数になることを証明せよ。

(証明１) 行列 A の i 番目の固有値 λ_i を固有行列$\boldsymbol{x_1}$をとすると

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}\cdot x_{ki}=\lambda_i\cdot x_{ji} \quad (i,j=0,1,2,\cdots,n) \tag{3}$$



式 (3) の両辺に左から x^*_{ji} をかけて、ｊについて和をとると

$$\sum_{j,k=1}^{n} x^*_{ji}\cdot A_{jk}\cdot x_{ki}=\lambda_i\sum_{j,k=1}^{n}|x_{ji}|^2 \tag{4}$$

式 (4) の両辺の複素共役をとると

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_{ji}\cdot A^*_{jk}\cdot x^*_{ki}=\lambda^*_i\sum_{j,k=1}^{n}|x_{ji}|^2 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\text{式 (5) の左辺}=\sum_{j,k=1}^{n} x_{ji}\cdot A_{kj}\cdot x^*_{ki} &= \sum_{j,k=1}^{n} x_{ki}\cdot A_{jk}\cdot x^*_{ji}\\ &= \sum_{j,k=1}^{n} x^*_{ji}\cdot A_{jk}\cdot x_{ki}\\ &= \lambda_i\sum_{j,k=1}^{n}|x_{ji}|^2 \end{aligned}\tag{6}$$

式 (5), (6) より

$$(\lambda_i-\lambda^*_i)\sum_{j=1}^{n}|x_{ji}|^2=0 \tag{7}$$

ここで、固有ベクトルは通常すべての成分がゼロとなる自明なベクトル以外のベクトルを考えるので、$\sum_{j=1}^{n}|x_{ji}|^2\neq 0$ となる。従って

$$\lambda_i=\lambda^*_i \quad (\lambda_i:\text{実数}) \qquad \text{(証明終了)} \tag{8}$$