線積分とその応用

目次

積分の再考

y軸という直線状経路に沿った積分

xy面上のある曲線経路に沿った線積分

xy面の曲線C上の点があるパラメタ*t*で表される場合の線積分

3次元空間の曲線経路Cに沿った線積分

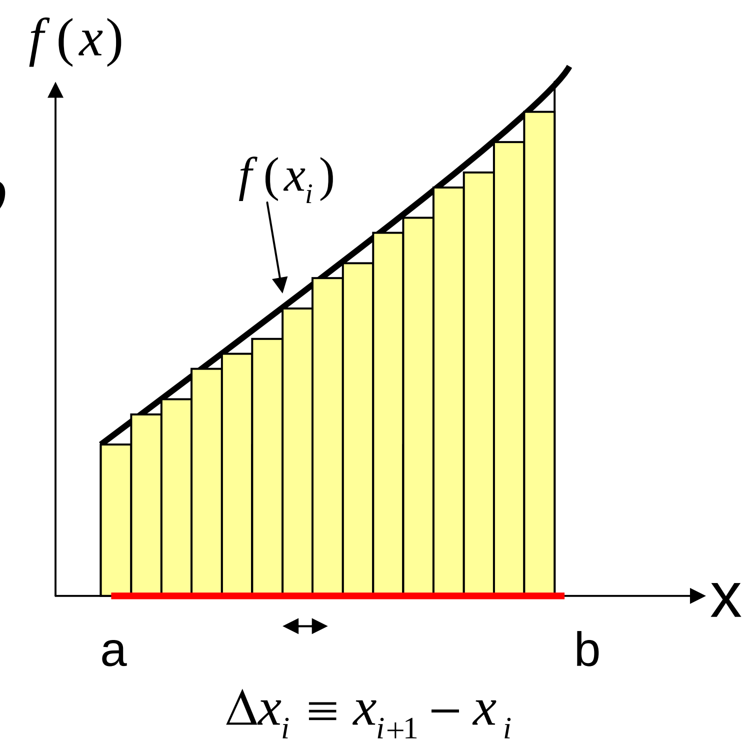
線積分の性質

物理における線積分の例

積分の再考

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i\,,\; x_0 \equiv a,\; x_n \equiv b$$



積分区間の微小分割(線要素)

関数の値f(x)と線要素Δxの積の和

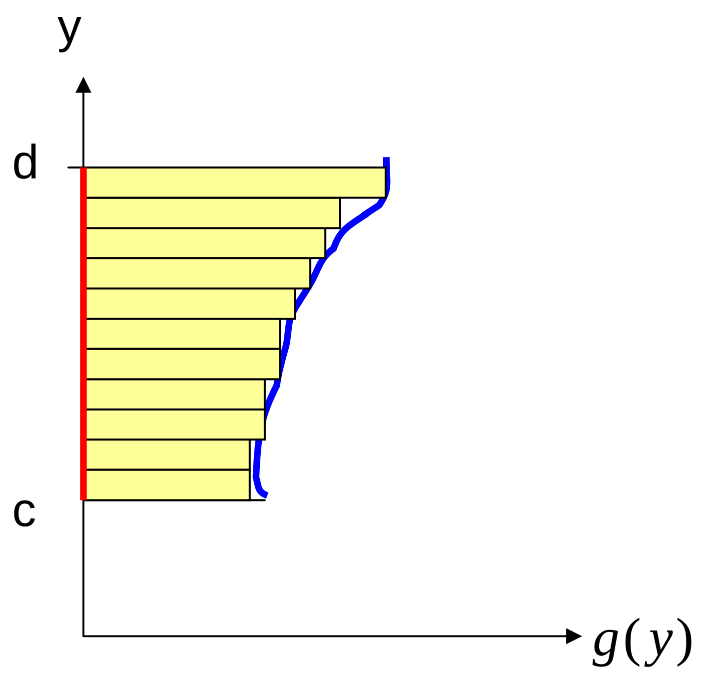
分割数の増加→極限値

普通の積分＝x軸という直線状の経路に沿った線積分

y軸という直線状経路に沿った積分

$$\int_c^d g(y)dy \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} g(y_j)\Delta y_j$$

$$\Delta y_j \equiv y_{j+1} - y_j\,,\; y_0 \equiv c,\; y_n \equiv d$$



積分区間の微小分割(線要素)

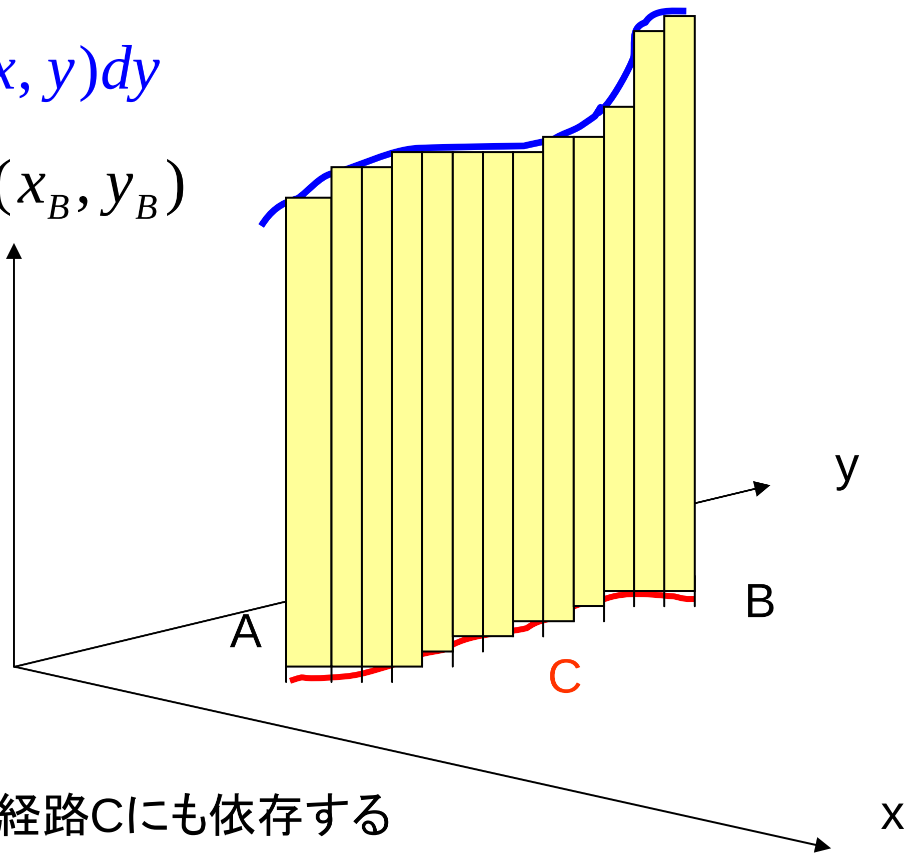
関数の値g(y)と線要素Δyの積の和

分割数の増加→極限値

xy面上のある曲線経路に沿った線積分

$$\int_A^B f(x,y)dx + \int_A^B g(x,y)dy$$

$$A \equiv (x_A, y_A),\ B \equiv (x_B, y_B)$$



線積分は一般に積分経路Cにも依存する

$$\int_{ACB} f(x,y)dx + \int_{ACB} g(x,y)dy$$

xy面の曲線C上の点があるパラメタtで表される場合の線積分

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\mathrm{e}}_x + y(t)\vec{\mathrm{e}}_y \ ; \ t_{\mathrm{A}} \le t \le t_{\mathrm{B}}$$

$\vec{\mathrm{e}}_x, \vec{\mathrm{e}}_y$: x, y軸向きの単位ベクトル

$$\int_{ACB} f(x,y)ds = \int_{ACB} f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt;$$

線要素$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

3次元空間の曲線経路Cに沿った線積分

変数x,y,zの関数, f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)について

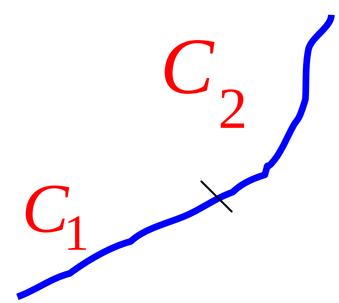
$$\int_{ACB} f(x,y,z)dx + \int_{ACB} g(x,y,z)dy + \int_{ACB} h(x,y,z)dz$$

$$A \equiv (x_A, y_A, z_A),\ B \equiv (x_B, y_B, z_B)$$

線積分の性質

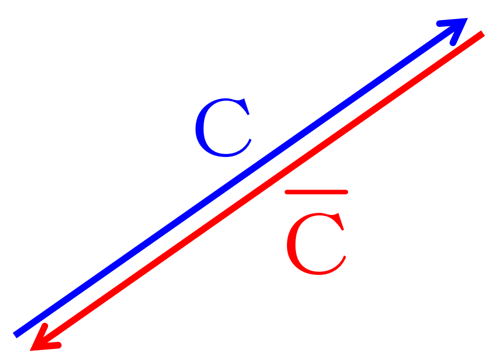
2つの経路 C_1 と C_2 について

$$\int_{C_1+C_2} = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$



経路 C とその逆向き経路 $\overline{\mathrm{C}}$ について

$$\int_{\overline{C}} = -\int_{C} \ , \quad \int_{C+\overline{C}} = 0$$



物理における線積分の例:

外力$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$が経路Ｃに沿って

点Ａから点Ｂまで行う仕事

成分も場所に依存する：

$$F_x=F_x(x,y,z),F_y=F_y(x,y,z),F_z=F_z(x,y,z)$$

$$\int_{ACB}\vec{F}\bullet d\vec{r}$$

$$=\int_{ACB}F_x(x,y,z)dx+\int_{ACB}F_y(x,y,z)dy+\int_{ACB}F_z(x,y,z)dz$$

$$A\equiv(x_A,y_A,z_A),\ B\equiv(x_B,y_B,z_B)$$