次の行列がエルミート行列であるとき、その固有値が実数であることを示せ

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \ \hat{A} = \hat{A}^{\dagger} \rightleftharpoons \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = a_{11}^* \\ a_{22} = a_{22}^* \\ a_{12} = a_{21}^* \end{array} \right\}. \tag{1}$$

(解答例)

固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ とすると、一番目の固有値 λ_1 のときの固有方程式は

$$\hat{A}\boldsymbol{x_1} = \lambda_1 \boldsymbol{x_1} \quad \rightleftharpoons \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\rightleftharpoons \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = \lambda_1 x_{11}, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = \lambda_1 x_{21}. \end{array} \right. \tag{3}$$

と書ける。式 (3) の上式に左から x_{11}^* を掛け、式 (3) の下式に左から x_{21}^* を掛けてその和をとると

$$x_{11}^* a_{11} x_{11} \ + \ x_{11}^* a_{12} x_{21} \ + \ x_{21}^* a_{21} x_{11} \ + \ x_{21}^* a_{22} x_{21} \ = \ \lambda_1 (|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2). \tag{4}$$

式 (4) の複素共役をとると

$$x_{11} a_{11}^* x_{11}^* \ + \ x_{11} a_{12}^* x_{21}^* \ + \ x_{21} a_{21}^* x_{11}^* \ + \ x_{21} a_{22}^* x_{21}^* \ = \ \lambda_1^* (|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2). \tag{5}$$

式 (1) より式 (5) は次のように書き直せる

$$x_{11} a_{11}^* x_{11}^* \ + \ x_{11} a_{21} x_{21}^* \ + \ x_{21} a_{12} x_{11}^* \ + \ x_{21} a_{22}^* x_{21}^* \ = \ \lambda_1^* (|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2). \tag{6}$$

式 (4) の左辺を式 (6) の左辺は等しくなるので

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2) = 0. \tag{7}$$

固有ベクトルは通常全ての成分がゼロとなる自明なベクトル以外のベクトルを考えるので、$(|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2) > 0$ と考えてよい。したがって

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_1^*. \tag{8}$$

２番目の固有値 λ_2 の固有方程式 $\hat{A}\boldsymbol{x_2} = \lambda_2 \boldsymbol{x_2}$ についても同様にして

$$\lambda_2 = \lambda_2^*. \tag{9}$$

が導ける。従って、(２×２）型のエルミート行列の固有値は必ず実数になる。