

テイラー展開 (filename=taylorexpansion050627a.tex)

1 定義

関数 $f(x)$ の点 $x = a$ 付近におけるテイラー展開

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots \quad (1.1)$$

関数 $f(x)$ の点 $x = 0$ 付近におけるテイラー展開

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots \quad (1.2)$$

2 よく使用される関数のテイラー展開

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{1}{2!}k(k-1)x^2 + \cdots \quad (|x| < 1), \quad (2.1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (2.2)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.4)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad (-1 < x \leq 1), \quad (2.5)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots, \quad (2.6)$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots, \quad (2.7)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots. \quad (2.8)$$

3 テイラー展開の使用例、応用例

1. 近似式： x が十分小さい場合

$$(1+x)^k \approx 1 + kx + \frac{1}{2!}k(k-1)x^2, \quad (3.1)$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2, \quad (3.2)$$

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3, \quad (3.3)$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \quad (3.4)$$

$$\log(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2, \quad (3.5)$$

$$\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3, \quad (3.6)$$

$$\sinh x \approx x + \frac{1}{3!}x^3, \quad (3.7)$$

$$\cosh x \approx x + \frac{1}{2!}x^2. \quad (3.8)$$

2. 質点力学：つりあい点の近傍における安定性の判定と安定な点の周りの（近似的な）単振動の固有振動

ある（1次元）力学系において、力 $F(x)$ が保存力でポテンシャル $U(x)$ により、 $F(x) = -dU/dx$ と表される場合を考える。ある点 $x = a$ において、 $U'(a) = 0$ ならば、ここでは力がゼロか、複数の力の合力がゼロでつりあっているとみなせる。このときポテンシャル $U(x)$ を点 $x = a$ のまわりにテイラー展開し、第3項までで近似できるとする。

$$U(x) \approx U(0) + U'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}U''(a)(x-a)^2, \quad (3.9)$$

$$\approx U(0) + \frac{1}{2!}U''(a)(x-a)^2. \quad (3.10)$$

ポテンシャルの定数項は力と運動には寄与しない。ここで、2次微分係数 $U''(a)$ の値が正ならば、ポテンシャル曲線 $U(x)$ は下の凸であり、この点では安定である。このとき、第3項はつりあい点 $x = a$ の周りの、 $U''(a)$ の値に等しいバネ定数をもつ、弾性による位置エネルギーと等価になり、粒子の質量が与えられれば、単振動の角振動数 ω や周期 T が求まる。

3. 数値計算では、点 a における関数の値と微分係数の値が既知であるとして、少し離れた点 x における関数の値 $f(x)$ を近似的に求めるために次の近似的関係式を使用することが多い。

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2. \quad (3.11)$$

4. オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.12)$$

証明：

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \cdots \\ &= \left[1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right] + i \left[\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots\right] \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

5. オイラーの公式の応用による三角関数の和差と積の公式の導出

二つの角度を持つオイラー公式の積を考える：

$$e^{iA}e^{iB} = [\cos A + i \sin A] \times [\cos B + i \sin B]. \quad (3.14)$$

この両辺を比較する。まず、左辺は

$$e^{i(A+B)} = \cos(A+B) + i \sin(A+B). \quad (3.15)$$

次に、右辺は

$$\begin{aligned} & [\cos A + i \sin A] \times [\cos B + i \sin B] \\ &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B) + i(\sin A \cos B + \sin B \cos A) \end{aligned} \quad (3.16)$$

これらの両辺の実数部と虚数部を比較すると

$$\cos(A+B) = (\cos A \cos B - \sin A \sin B), \quad (3.17)$$

$$\sin(A+B) = (\sin A \cos B + \sin B \cos A). \quad (3.18)$$

三角関数の和差と積の公式が求まる。

6. オイラーの公式の応用による倍角の公式、3倍角の公式の導出
オイラー公式の n 乗の場合を考える:

$$(e^{i\theta})^n = [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n. \quad (3.19)$$

ここで

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \\ &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

が成立する。まず、 $n = 2$ の場合に、二つの表現における実数部分と虚数部分をそれぞれ比較すると、倍角の公式が得られる:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad (3.21)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta. \quad (3.22)$$

次に、 $n = 3$ の場合に、二つの表現における実数部分と虚数部分をそれぞれ比較すると、3倍角の公式が得られる:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \quad (3.23)$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta. \quad (3.24)$$

7. $\cos, \sin$ などの関数に使用される変数は無次元であること。

加減ができる物理量は同じ次元に限られる。テイラー展開において変数の級数展開の係数は無次元の定数であるから、関数に使用される変数は無次元であるべきことがわかる。

参考文献