# 偏微分とその応用

目次

複数の独立変数の関数

偏微分とは何か？

全微分 とは何か

（＊参考：全微分になるための必要十分条件）

3変数(x,y,z)の関数 f=f(x,y,z)の場合

Filename=Partial-diff070614a.ppt

# 複数の独立変数の関数

２つの変数x,y に対して、ある値fを対応させる規則が定められている場合。変数fを２変数x,yの関数という。２つの変数の値の組（x,y）に対する関数の値をf(x，y)と表す。f=f(x,y)という書き方をする場合もある。

数学における実例：

$$f(x,y) \equiv x^2 + xy - y^2 + 1$$

$$\to f(1,-1) = 1^2 + 1\times(-1) - (-1)^2 + 1 = 0,$$

$$\to f(2,\ 1) = 2^2 + 2\times 1 - 1^2 + 1 = 6.$$

## 物理学における実例：

理想気体nモルの絶対温度T，体積V，圧力Tの場合の状態方程式

$$PV = nRT \quad (R:\text{気体定数})$$

$$\to P = \frac{nRT}{V}; \quad P = P(V,T)$$

# 偏微分とは何か？

2変数の関数f(x,y)は、他の変数を「固定」すれば、すなわち、他の変数を「一定」とみなせば、1変数の関数と見なせるから,「1つの変数の微分」を考えることができる！

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \left( \text{または} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y \right)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \left( \text{または} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x \right)$$

これを**偏微分（偏微分係数、(partial differential) ）**という。

# 高階の偏微分係数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\equiv f_{xx}), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (\equiv f_{yx}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (\equiv f_{xy}), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\equiv f_{yy}),$$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$と$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$が存在し、ともに連続であるならば

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

# 全微分 とは何か

複数変数の関数の増分（inclement, 変化量）

$$\Delta f \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$
$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$
$$\approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y+\Delta y)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} \Delta y$$

テーラー展開を用いる！

$$\approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} \Delta x + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} \Delta x \Delta y}_{\text{高次項}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} \Delta y$$

**複数変数の関数の変化の主要部分としての全微分（total differential）**

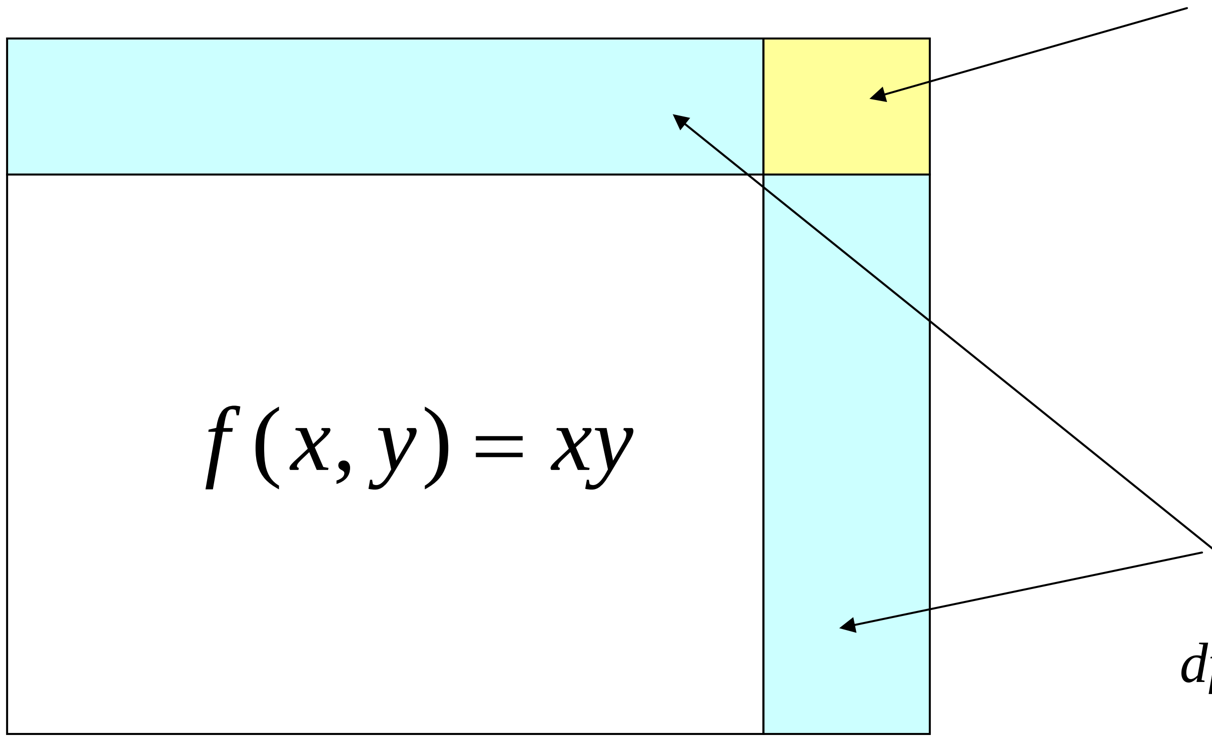
$$df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} \Delta y$$

独立変数に対して

$$\Delta x = dx, \Delta y = dy$$

$$\Rightarrow df \equiv \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)} dx}_{\text{x方向の変化}} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)} dy}_{\text{Y方向の変化}}$$

# 関数 f(x,y)=xyの増分Δfと全微分df




増分と全微分の差

$$\Delta f - df$$

**全微分**

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

$$= ydx + xdy$$

（＊参考：全微分になるための必要十分条件）

変数x,yの関数P(x,y)とQ(x,y)からなる

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

が関数 $f(x,y)$ の全微分であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である。このとき、$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

を完全微分であるという。

# 3変数(x,y,z)の関数 f=f(x,y,z)の場合

関数 $f = f(x, y, z)$の全微分

$$df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y,z)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y,z)} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x,y,z)} dz$$