逆三角函数
―その多価関数性と主値、特殊な分枝―

Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)
filename=inverse-trigonometric-func080528b.ppt

1．一般に, 変数の関数 $y = f(x)$ に関し, ある関数 $y = g(x)$ が存在して (定義域内の　) どのような x に関しても $f(g(x)) = x$, $g(f(x)) = x$ が成り立つとき, f と g とは　互いに他の逆関数（inverse function ）という。

　三角函数の逆関数に関しては普通, sin, cos, tan の逆函数を考えて, 各々

$\arcsin x = \sin^{-1} x$, $\arccos x = \cos^{-1} x$, $\arctan x = \tan^{-1} x$

と書く。これらを総称して、逆三角関数という。正弦関数の逆関数は逆正弦関数, などという。因みに, arc は文字通り「弧」のことで, 例えば $y = \sin x$ の逆関数 $x = \sin^{-1} y$ が返してくる値 x は y に対する 角度 x [rad] であるが, それは単位円の対応する弧の長さに等しいからである。

２. これらの関数は一価関数ではない。すなわち、x の値に対して返って来る関数の値が一つだけに定まる関数にはならない。それはこれらの関数が周期関数だからである。例えば, arcsin(1/2) = (-1)n(π/3) + nπ, （n：整数）である。　同様に逆三角関数は, 普通、関数値が一つあれば無限に沢山ある。

３. 一般には、arcsin の値域を [-π/2, π/2] に, arccos の値域を [0, π] に, arctan の値域を (-π/2, π/2) に制限したものが用いられる。これらの区間を, 逆三角関数の主枝（または主分枝、main branch）という。それ以外にも逆三角関数を一価関数にするような値域は幾つか存在するが, それらの一つ一つは枝（または分枝、branch）と呼ばれている。

ここで、注意を喚起するために、主枝に値域を制限した逆三角関数を、大文字を用いて各々

$y = \mathrm{Arcsin}\ x = \mathrm{Sin}^{-1}\ x$,

$y = \mathrm{Arccos}\ x = \mathrm{Cos}^{-1}\ x$,

$y = \mathrm{Arctan}\ x = \mathrm{Tan}^{-1}\ x$

と書くことにする。これらの値を各々その逆三角関数の主値 (しゅち、principal value) という。 ただし、一般には、主値に対して大文字が使われていないことに注意すべきである。

逆三角関数の主値

$x \geq 0$の場合の主値

$$0 \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \cos^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

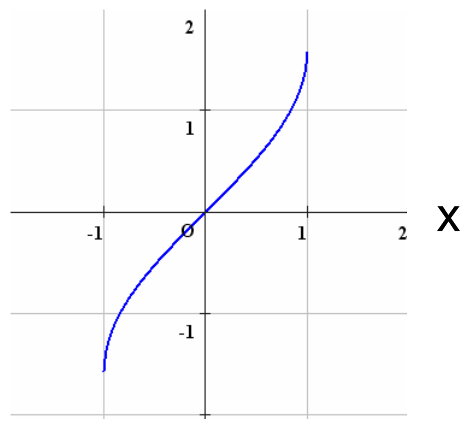
$x \leq 0$の場合の主値

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x < 0$$

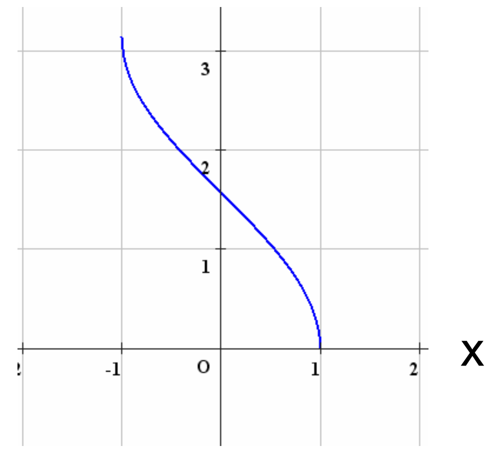
$$\frac{\pi}{2} < \cos^{-1} x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < 0$$

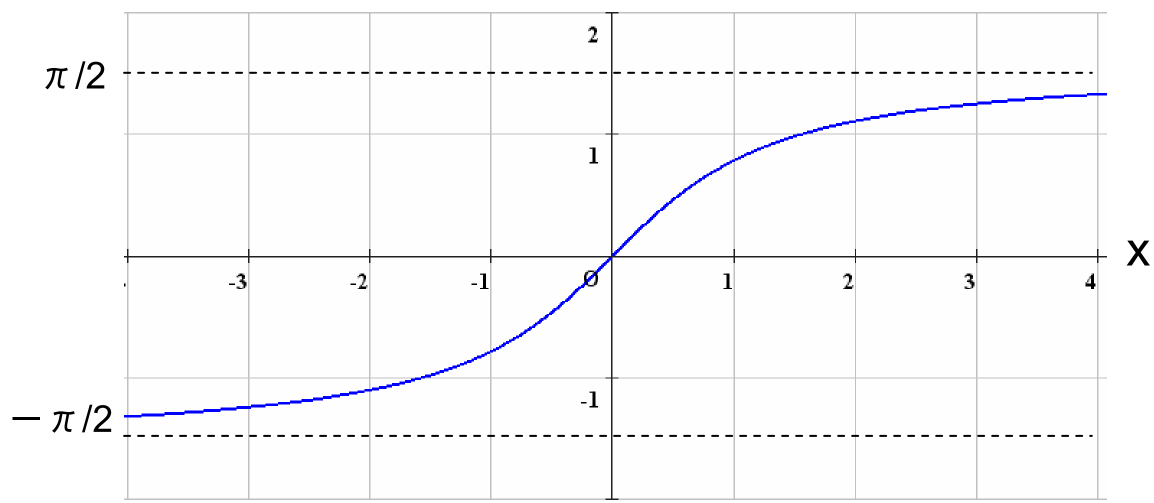
$\mathrm{Sin}^{-1}x$



$\mathrm{Cos}^{-1}x$



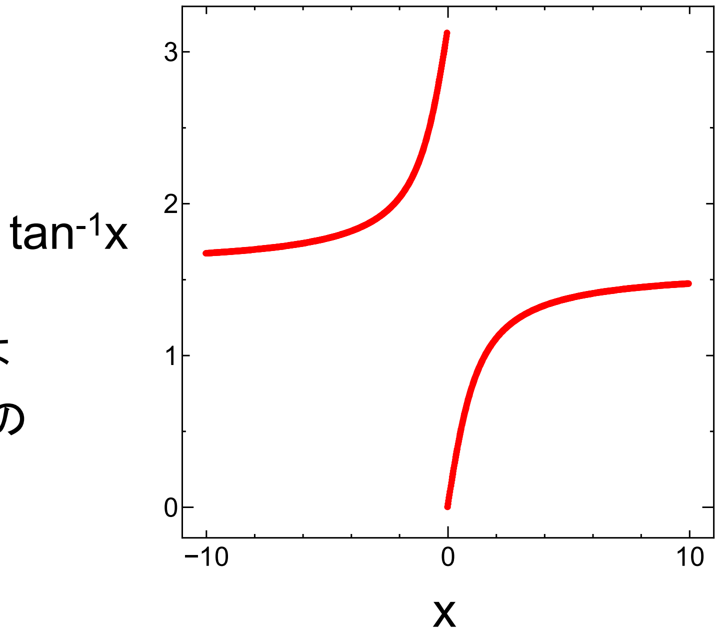
$\mathrm{Tan}^{-1}x$



4. 物理学、工学などの諸分野における多くの目的上、特殊な分枝が必要になることがある。

例えば、物理学の振動運動の解析における位相のずれ(phase shift)を表すために、tanの逆関数が使用されるが、次の式のように、断りなしに(暗黙のうちに)、部分的に主値とπだけずらしたものが多くの教科書で使用されている。

$$\tan^{-1} x \equiv \begin{cases} \mathrm{Tan}^{-1} x & (x \geq 0) \\ \mathrm{Tan}^{-1} x + \pi & (x < 0) \end{cases}$$



図のように、修正された逆tan関数のグラフは一価、すなわち、ひとつのxに対して、ひとつの$\tan^{-1}x$の値が対応している。

5. 数値計算の際、各種のプログラム言語で定義されている逆関数も、主枝に値域を制限した逆三角函数(逆三角関数の主値)であることにも注意するべきである。

参考文献

http://phaos.hp.infoseek.co.jp/elmtrasfn/trigonometric/invtrigfn.htm

M. R. Spiegel,「数学公式・数表ハンドブック」、オーム社、2004年。１７－１８ページ。