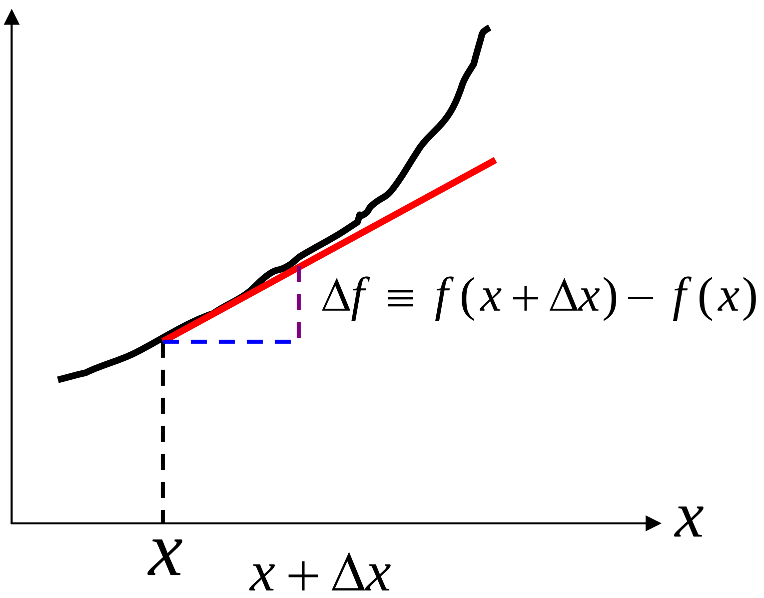
微分係数,増分と微分

目次

微分係数(導関数)

変数xの関数 $f(x)$ の微分係数の定義

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



ある点におけるグラフの傾き

局所的変化率としての微分係数

関数の増分と微分

変数xの増分Δxに対応する関数f(x,y)の増分

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\cong [f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \cdots] - f(x) \quad \text{（テーラー展開）}$$

$$= f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \cdots$$

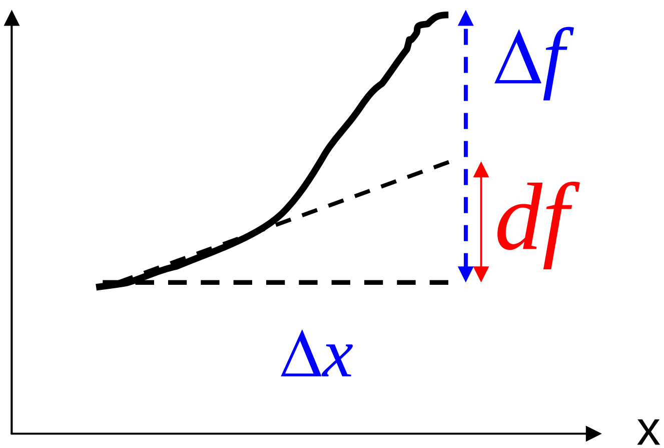
関数の微分:関数の増分の主要な部分

$$df \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow f(x) = x\text{の場合；} dx = \left(\frac{dx}{dx}\right)\Delta x$$

$$\rightarrow \boxed{dx = \Delta x}$$

変数の増分＝変数の微分



$$\boxed{df = \left(\frac{df}{dx}\right)dx} \rightarrow \boxed{\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df}{dx} \quad \text{微分商としての微分係数}}$$

微分(differential)の公式

c:定数

(1) $dc = 0$

(2) $d(cf) = cdf$

(3) $d(fg) = fdg + gdf$

(4) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$

例題：$f(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

$\rightarrow df = (3x^2 - 6x + 2)dx$

合成関数の微分係数

変数xの関数fがあり、さらに、「変数」fの関数gがある場合

$$f = f(x), g = g(f) = g[f(x)]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}g[f(x)] = \left(\frac{dg}{df}\right)\left(\frac{df}{dx}\right) = g'(f)f'(x)}$$

$$\because \frac{d}{dx}g[f(x)] = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = \left(\frac{dg}{df}\right)\left(\frac{df}{dx}\right) = g'(f)f'(x)$$

助変数（パラメタ）の微分係数

ある変数tの二つの関数 $f(t)$, $g(t)$が与えられているとする。

$$\boxed{\left(\frac{dg}{df}\right) = \frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

$$\because \left(\frac{dg}{df}\right) = \frac{dg}{df} = \frac{dg}{dt}\frac{dt}{df} = \frac{\left(\frac{dg}{dt}\right)}{\left(\frac{df}{dt}\right)} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

微分の応用例

単振り子の周期Tは、ひもの長さL,重力加速度gとすると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ひもの長さが約2%変化したとき、周期Tは近似的にどれくらい変化するか.

解

周期Tをひもの長さLの関数とみなして、周期の変化ΔTを周期の微分で近似する。

$$dT \cong dT = \left(\frac{dT}{dL}\right)dL = 2\pi \bullet \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Lg}}dL = \frac{1}{2}T\frac{dL}{L}$$

$$dL = 0.02L \rightarrow dT \cong \frac{1}{2}T \times 0.02$$

$$\rightarrow \frac{dT}{T} \cong 0.01$$

周期はほぼ1%変化する