

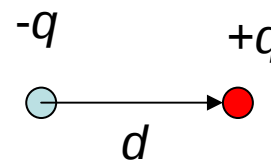
電気双極子モーメントおよび 磁気双極子モーメント

目次

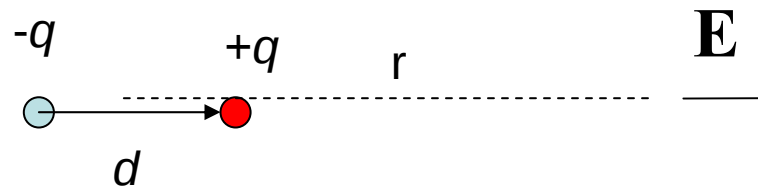
1. 電気双極子モーメントとそれが作る電場
2. 外部電場の中の電気双極子モーメント
3. 磁気双極子モーメントとそれが作る磁場
4. 電気双極子間相互作用ポテンシャル
5. 外部磁場の中の磁気双極子モーメント
4. 電気双極子間相互作用ポテンシャル
7. 微小円形電流と磁気双極子の比較
8. 磁気双極子モーメントと角運動量
9. 原子の磁気双極子モーメントは電子のスピンで決まる

1. 電気双極子モーメントとそれが作る電場

距離 d だけ離れて存在している $-q, +q$ の正負の電荷対を電気双極子といい、 $p=qd$ を電気双極子モーメントという。 d に向きを持たせると電気双極子モーメントは一般にはベクトルである。

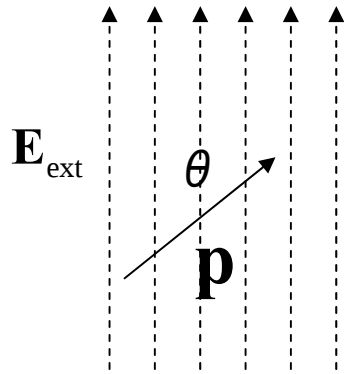

$$p = qd \quad \mathbf{p} \equiv q\mathbf{d}$$

電気双極子はその方向の十分遠方の距離 r の地点につくる電場の大きさ E


$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} [\epsilon_0: \text{真空の誘電率}]$$

2. 外部電場の中の電気双極子モーメント

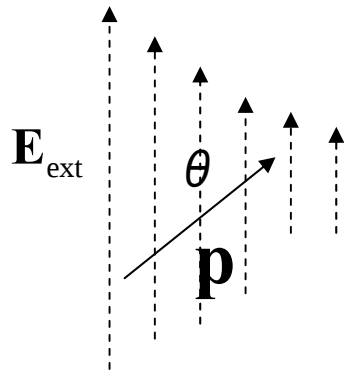
外部電場 E_{ext} 中の電気双極子に働くポテンシャル・エネルギー



$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$$
$$= -pE_{\text{ext}} \cos \theta$$

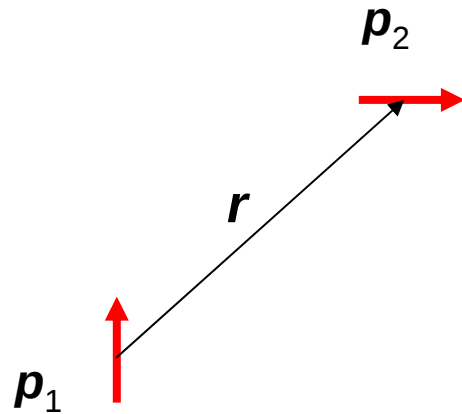
$\mathbf{p}$ ベクトルと E_{ext} ベクトルが平行になろうとする。

空間的不均一な外部電場 E_{ext} 中の電気双極子に働くトルク(力のモーメント)



$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

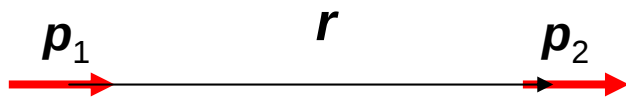
3. 電気双極子モーメント間の相互作用ポテンシャル



$$U_{12} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3}\right]$$

導出：一番目の電気双極子モーメントが位置 $\mathbf{r}$ において作る電場の下で、2番目の電気双極子モーメントが感じる電氣的ポテンシャルエネルギーを計算する。

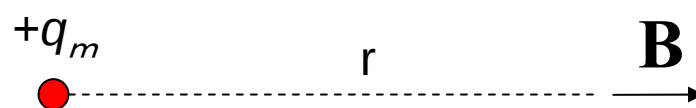
類似：分子間のファン・デア・ワールス力



左記の相互配置が最もエネルギーが低い。

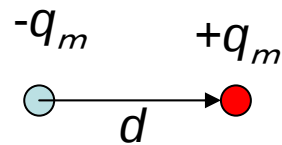
4. 磁気双極子モーメントとそれが作る磁場

「磁荷」 q_m が距離 r の地点につくる磁場(磁束密度)の大きさ B

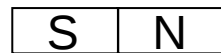


$$B = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2}$$

距離 d だけ離れて存在している $-q_m, +q_m$ の正負の「磁荷」対を磁気双極子といい、 $\mu = q_m d / \mu_0$ を磁気双極子モーメントという。 d に向きを持たせると磁気双極子モーメントは一般にはベクトルである。

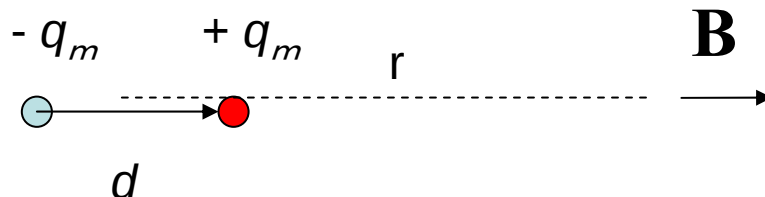


$$\mu \equiv \frac{q_m d}{\mu_0}$$



微小磁石

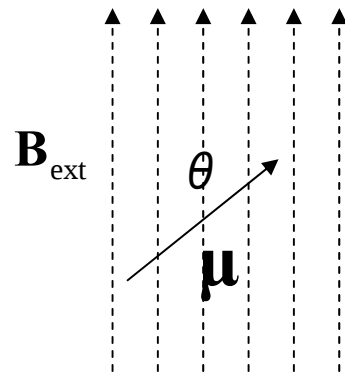
磁気双極子はその方向の十分遠方の距離 r の地点につくる磁場の大きさ B



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{r^3}, \quad [\mu_0: \text{真空の透磁率}]$$

5. 外部磁場の中の磁気双極子モーメント

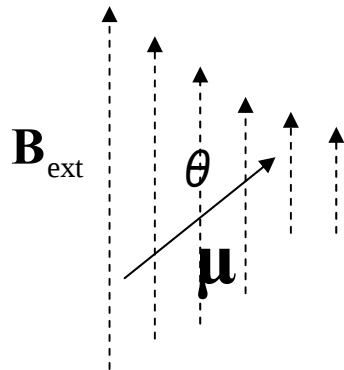
外部磁場 B_{ext} 中の磁気双極子に働くポテンシャル・エネルギー



$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}$$
$$= -\mu B_{\text{ext}} \cos \theta$$

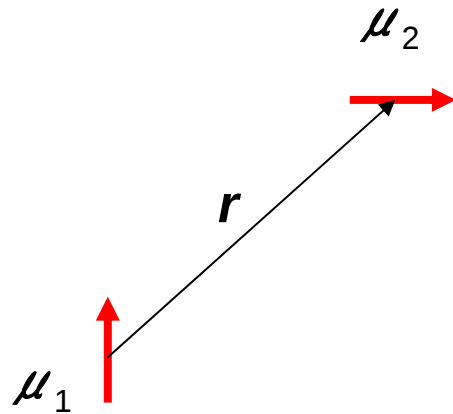
μ ベクトルと B_{ext} ベクトルが平行になろうとする。

空間的不均一な外部磁場 B_{ext} 中の磁気双極子に働くトルク(力のモーメント)



$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$$

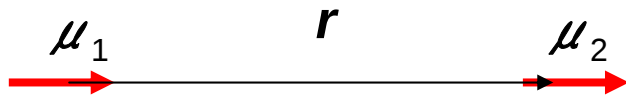
6. 磁気双極子モーメント間の相互作用ポテンシャル



$$U_{12} = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2)}{r^3} \right]$$

導出：一番目の磁気双極子モーメントが位置 $\mathbf{r}$ において作る磁場の下で、2番目の磁気双極子モーメントが感じる磁氣的ポテンシャルエネルギーを計算する。

類似：核力におけるテンソル力成分

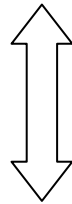


左記の相互配置が最もエネルギーが低い。

7. 微小円形電流と磁気双極子の比較

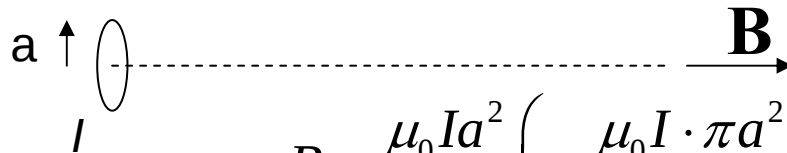
磁気双極子のつくる磁場

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{r^3}$$

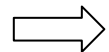


微小円形電流の作る磁場

半径 a 、電流の強さ I の円電流(分子磁石)が十分遠方の距離 r の地点につくる磁場 B



$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \left(= \frac{\mu_0 I \cdot \pi a^2}{2\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \cdot S}{2\pi r^3} \right), \quad S \equiv \pi a^2, \mu_0 : \text{真空の透磁率}$$



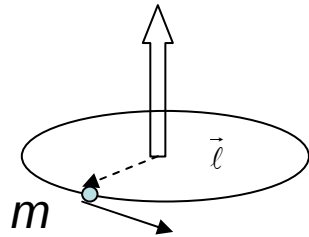
磁気双極子モーメント=(微小電流の大きさ) $\times$ (微小電流が囲む面積)

$$\mu = I \times S$$

等価

8. 磁気双極子モーメントと角運動量

質量 m 、電荷 q 、速さ v の荷電粒子が半径 r の円運動をする場合の軌道角運動量



$$\vec{\ell} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

荷電粒子の軌道運動による磁気双極子モーメント $=[(\text{電荷})/2 \times (\text{質量})] \times (\text{軌道角運動量})$

$$I = q/T = q(v)/(2\pi r), S = \pi r^2$$

$$\rightarrow \mu_{\text{orbit}} = \left(\frac{q}{2m} \right) \ell$$

電子の軌道運動による磁気双極子モーメント

$$\mu_{\text{orbit}} = \left(\frac{-e}{2m_e} \right) \ell, \quad \text{ベクトル表現} \vec{\mu}_{\text{orbit}} = \left(\frac{-e}{2m_e} \right) \vec{\ell}$$

参考: 量子力学においては、スピン角運動量 s に起因する磁気双極子モーメントも定義できる。

9. 原子の磁気双極子モーメントは電子のスピンで決まる

$$\vec{\mu}_e = \left(\frac{-e}{2m_e} \right) \vec{\ell}_e + \left(\frac{-e}{2m_e} \right) \vec{s}_e,$$

$$\vec{\mu}_p = \left(\frac{-e}{2m_p} \right) \vec{\ell}_p + \left(\frac{-e}{2m_p} \right) \vec{s}_p$$

$$\rightarrow |\vec{\mu}_e| \gg |\vec{\mu}_p|$$

陽子(p)の質量は電子(e)の1840倍

多くの材料では、電子の軌道運動による磁氣的効果は相互に相殺し、正味ゼロか非常に小さくなる。

$$\vec{\mu} \cong \vec{\mu}_e \cong \left(\frac{-e}{2m_e} \right) \vec{s}_e$$

参考文献

中山正敏「電磁気学」、裳華房、1986年。1章、5章。

V.D.バーガー、M. D.オルソン「電磁気学I」、培風館、1991年。特に、4、7章。