

x 軸上にある自由端 ($x = 0$) における正弦波の反射を考える。振幅 A_i, A_r , 角振動数 ω 波数 k の入射波と反射波の位置 x , 時刻 t における変位が次のように与えられている。

$$\text{入射波 } \psi_i(x, t) = A_i \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

$$\text{反射波 } \psi_r(x, t) = A_r \sin(\omega t + kx + \phi_r) \quad (2)$$

($A_i, A_r > 0$, ϕ_r : 位相差; 入射波を基準とする反射波の位相差)

$x = 0$ における合成波が $\Psi(x, t) \equiv \psi_i(x, t) + \psi_r(x, t)$ と与えられるとする。

1. 自由端の条件式を記せ。
2. 任意の時刻で、自由端の条件が成立するならば、振幅と位相差 ϕ はどうなるか。
3. 領域 ($x < 0$) における合成波の関数形はどうなるか、その特徴を述べよ。

(解答例)

1. 自由端の条件式は、固定端の前後で変位が同じ (= 変化しない) または応力がゼロであるから次のように表される。

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, t) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= -kA_i \cos(\omega t) + kA_r \cos(\omega t + \phi_r) \\ &= -k(A_i - A_r \cos \phi_r) \cos(\omega t) - kA_r \sin \phi_r \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、三角関数の加法定理

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin B \sin A \quad (5)$$

を用いた。

2. 任意の時刻で、自由端の条件が成立するならば、

$$A_i - A_r \cos \phi_r = 0 \quad (6)$$

$$A_r \sin \phi_r = 0 \quad (7)$$

$$A_i > 0, A_r > 0 \text{ であるから式 (6) より } \cos \phi_r > 0 \quad (8)$$

$$\text{式 (7) より } \phi_r = 0 \text{ または } \pi. \quad (9)$$

(8), (9) より、 $A_i = A_r, \phi_r = 0$ となる。

3. 領域 ($x < 0$) における合成波の関数形は

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= A_i \sin(\omega t - kx) + A_i \sin(\omega t + kx) \\ &= 2A_i \sin(\omega t) \cos(kx) \end{aligned} \quad (10)$$

のように、移動しない定在波 (定常波) となり、固定端 ($x = 0$) は変位が最大になる腹になっている。