[正弦波の固定端における反射]wavereflection-1-qa071206.tex

x 軸上にある固定端（$x \geqq 0$）における正弦波の反射を考える。振幅 A_i, A_r, 角振動数 ω 波数 k の入射波と反射波の位置 x, 時刻 t における変位が次のように与えられている。

$$\text{入射波}\psi_i(x,t) = A_i \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

$$\text{反射波}\psi_r(x,t) = A_r \sin(\omega t + kx + \phi_r) \quad (2)$$

$(A_i, A_r > 0$, ϕ_r : 位相差；入射波を基準とする反射波の位相差)

$x \leqq 0$ における合成波が $\Psi(x,t) \equiv \psi_i(x,t) + \psi_r(x,t)$ と与えられるとする。

1. 固定端の条件式を記せ。
2. 任意の時刻で、固定端の条件が成立するならば、振幅と位相差 ϕ はどうなるか。
3. 領域 $(x < 0)$ における合成波の関数形はどうなるか、その特徴を述べよ。

(解答例)

1. 固定端の条件式は、変位がゼロであるから次のように表される。

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi(0,t) \quad (3) \\ &= A_i \sin(\omega t) + A_r \sin(\omega t + \phi_r) \\ &= (A_i + A_r \cos\phi_r)\sin(\omega t) + (A_r \sin\phi_r)\cos(\omega t). \quad (4) \end{aligned}$$

ここで、三角関数の加法定理

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \quad (5)$$

を用いた。

2. 任意の時刻で、固定端の条件が成立するならば、

$$A_i + A_r \cos\phi_r = 0 \quad (6)$$

$$A_r \sin\phi_r = 0 \quad (7)$$

$$A_i > 0, A_r > 0 \text{ であるから式 (6) より } \cos\phi_r < 0 \quad (8)$$

$$\text{式 (7) より } \phi_r = 0 \text{ または} \pi. \quad (9)$$

(8),(9) より、$A_i = A_r, \phi_r = \pi$ となる。

3. 領域 $(x < 0)$ における合成波の関数形は

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= A_i \sin(\omega t - kx) + A_i \sin(\omega t + kx + \pi) \\ &= A_i \sin(\omega t - kx) - A_i \sin(\omega t + kx) \\ &= -2A_i \cos(\omega t)\sin(kx) \quad (10) \end{aligned}$$

のように、移動しない定在波（定常波）となり、固定端 $(x = 0)$ は変位ゼロの節になっている。