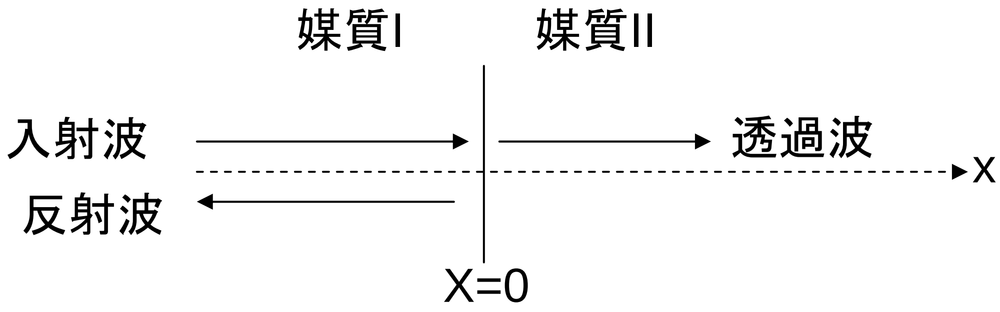
波の反射と透過

目次

Made by R. Okamoto (Kyushu Institute of Technology)
filename=波の反射透過091124*.ppt

1. 2つの媒質の境界面における波の反射と屈折

波が媒質Iから別の媒質IIとの境界面に入射する場合、
その境界面で反射して、媒質I内を逆向きに進む反射波が生じる
一般には、入射波に引き続いた透過波が媒質IIの中に生じる。



ここでは、正弦波（sin波）が2つの媒質の境界面の左側から垂直に入射する場合を考える

2. 入射波が媒質境界において完全に反射される場合

まず、特別な場合として、透過波は生じずに、入射波が境界面において完全に反射される場合を扱う。

(2A) (完全な)固定端:(合成)波の変位はゼロ

A: 振幅, k: 波数, ω: 角振動数

入射波(incident wave)[の変位] $\psi_i(x,t) \equiv A_i \sin(\omega t - kx)$

反射波(reflective wave)[の変位] $\psi_r(x,t) \equiv A_r \sin(\omega t + kx + \delta_r)$

反射による位相の変化

(初期時刻、原点における位相差)

ここで

A: 振幅, k: 波数, ω: 角振動数

それらの定義と位相速度vとの関係式は

媒質Iにおける合成波の変位 $\Psi(x,t) \equiv \psi_i(x,t) + \psi_r(x,t)$

X＝0における固定端の条件 $\Psi(x=0,t)=0$ ←入射波だけでは変位ゼロにならない

$$(A_i + A_r\cos\delta_r)\sin\omega t + A_r\sin\delta_r\cdot\cos\omega t = 0 \quad \text{for all t}$$

$$\to A_i + A_r\cos\delta_r = 0,\ A_r\sin\delta_r = 0$$

$$\to A_i = A_r,\ \delta_r = \pi$$

固定端では、反射波と入射波の振幅は等しく、位相の変化はπ（180度）である。

(2B) [完全な]自由端:境界面での応力はゼロ

X＝0における応力の条件 $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(x=0,t)=0$ ←「応力はひずみに比例する」(フックの法則）

$$-kA_i\cos\omega t + kA_r\cos(\omega t+\delta_r) = 0 \quad \text{for all t}$$

応力＝単位面積当たりの力、
ひずみ(歪）＝単位長さ当りの変位

$$\to A_i - A_r\cos\delta_r = 0,\ A_r\sin\delta_r = 0$$

$$\to A_i = A_r,\ \delta_r = 0$$

自由端では、反射波と入射波の振幅も位相も等しい。

備考：xとtの順番を逆にするとどうなるか

入射波 [の変位] $\psi_i(x,t) \equiv A_i \sin(kx - \omega t)$

反射波 [の変位] $\psi_r(x,t) \equiv A_r \sin(kx + \omega t + \delta_r)$

(完全な）自由端における反射の場合を考え、（2A）の場合と比較してみる。

端(原点）における(合成波の）変位がゼロであるから

$$
\begin{aligned}
0 &= \psi_i(0,t) + \psi_r(0,t) \\
&= A_i \sin(-\omega t) + A_r \sin(\omega t + \delta_r) \\
&= (-A_i + A_r \cos\delta_r)\sin\omega t + (A_r \sin\delta_r)\cos\omega t
\end{aligned}
$$

$$
\to \begin{cases} -A_i + A_r \cos\delta_r = 0 \\ A_r \sin\delta_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta_r = 0, \pi : \begin{cases} \delta_r = 0\text{の場合}：A_r = A_i \\ \delta_r = \pi\text{の場合}：A_r = -A_i ;\ \text{不適} \end{cases}
$$

このように、一見すると、（2A）における議論と逆の結論がでて、矛盾する。

しかし、入射波と反射波を次のように書き直すと、

$$\psi_i(x,t) = -A_i \sin(\omega t - kx)$$

$$= A_i \sin(\omega t - kx + \pi),$$

$$\psi_r(x,t) = A_r \sin(\omega t + kx)$$

$$= A_r \sin(\omega t + kx + 2\pi)$$

$$= A_r \sin[(\omega t + kx + \pi) + \pi].$$

やはり、自由端の場合には、入射波に比べて、反射波の位相はπだけずれることがわかり、(2A)と同じ結果となることが分かる。

３．反射波と透過波も存在する場合

ここでは、引っ張られた弦の横波を例として扱う。

弦の張力をS,線密度をσのとき、弦の横波の位相速度 $v = \sqrt{S/\sigma}$

弦の線密度が媒質Ｉでσ、媒質IIでσ’とする。

横波の角振動数ωとすると、媒質I,IIにおける波数をそれぞれk、k‘とすると、

位相速度はそれぞれ

$$v = \omega / k, v' = \omega / k'$$

透過による位相の変化

透過波（transient wave)の変位 $\psi_t(x,t) \equiv A_t \sin(\omega t - k' x + \delta_t)$

媒質境界面で波の発生・吸収がないと想定しているから、あるいは
入射波により透過波が誘起されるので、角振動数は等しい。

<u>x＝0における波の接続条件：境界面において、両側の波の変位と応力が等しいこと</u>

$$\psi_i(0,t) + \psi_r(0,t) = \psi_t(0,t),$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(0,t) + \frac{\partial \psi_r}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \psi_t}{\partial x}(0,t)$$

任意の時刻で成立するためには、cosωt、sinωtの係数がゼロでなければならない。

$$A_i + A_r\cos\delta_r = A_t\cos\delta_t,\ A_r\sin\delta_r = A_t\sin\delta_t,\cdots(*1)$$

$$k(A_i - A_r\cos\delta_r) = k' A_t\cos\delta_t,\ kA_r\sin\delta_r = k' A_t\sin\delta_t\cdots(*2)$$

(＊1)、(＊2)のそれぞれの第2式が成立するためには

$$\sin\delta_r = 0 \to \delta_r = 0\text{または}\pi$$

$$\sin\delta_t = 0 \to \delta_t = 0\text{または}\pi$$

→4つの場合: $(\delta_r,\delta_t) = (0,0),(\pi,0),(0,\pi),(\pi,\pi)$

$\delta_t = \pi$の場合 $: A_t < 0$

$\to \delta_t = 0$ <u>境界面において、透過波の位相は入射波の位相と同じ</u>

残り2つの場合 $(\delta_r,\delta_t) = (0,0)$または$(\delta_r,\delta_t) = (\pi,0)$

残り2つの場合に、(*1),(*2)式のそれぞれの第一式より

$$(\delta_r, \delta_t) = (0, 0) \to v' > v;\ A_r = \left(\frac{v' - v}{v' + v} \right) A_i,\ A_t = \left(\frac{2v'}{v' + v} \right) A_i,$$

$$(\delta_r, \delta_t) = (\pi, 0) \to v > v';\ A_r = \left(\frac{v - v'}{v' + v} \right) A_i,\ A_t = \left(\frac{2v'}{v' + v} \right) A_i,$$

位相速度が小さい媒質（線密度が大）から位相速度が大きい媒質（線密度が小）へ波が入射する場合：境界面において、入射波と反射波は同位相である。

（[完全な]自由端の場合と同じ）

位相速度が大きい媒質（線密度が小）から位相速度が小さい媒質（線密度が大）へ波が入射する場合：境界面において、入射波から反射波へnの位相の変化はπである。

（[完全な]固定端の場合と同じ）

波の反射率Rの定義

$$R \equiv \frac{I_r}{I_i}$$

$$= \frac{A_r^2}{A_i^2} = \left(\frac{v' - v}{v' + v} \right)^2$$

波の強度(強さ、intensity）I

$$I \equiv \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v, \ (\rho \to \sigma)$$

$\Rightarrow$ 入射波と反射波の強さをそれぞれI_i, I_rとする。

透過率Tの定義

境界面におけるエネルギー保存より

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} \quad \leftarrow I_i = I_r + I_t$$

(I_tは透過波の強さ)

$$= 1 - R = \frac{4vv'}{(v' + v)^2}$$