例題（波の合成）wave-gousei-qa081028.tex

$+x$ 軸方向に進む、同じ角振動数 ω、同じ波数 k を持つ、2 つの正弦波の、位置 x, 時刻 t における波動関数が次のように与えられている。

$$\begin{aligned} \psi_1(x,t) &= a\sin(kx-\omega t), & (1)\\ \psi_2(x,t) &= \frac{a}{\sqrt{2}}\sin(kx-\omega t+\frac{\pi}{4}).\ (a : \text{定数}). & (2)\end{aligned}$$

これらの合成波 $\Psi(x,t)$ の振幅 A と位相定数（初期位相）δ を計算せよ。

(解答例) 題意より、合成波は

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= a\sin(kx-\omega t)+\frac{a}{\sqrt{2}}\sin(kx-\omega t+\frac{\pi}{4}) \\ &= a\sin(kx-\omega t)+\frac{a}{\sqrt{2}}[\sin(kx-\omega t)\cos(\frac{\pi}{4})+\cos(kx-\omega t)\sin(\frac{\pi}{4})] \\ &= \left(\frac{3a}{2}\right)\sin(kx-\omega t)+\left(\frac{a}{2}\right)\cos(kx-\omega t) \qquad (3)\end{aligned}$$

となる。ここで、三角関数の加法定理

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A \qquad (4)$$

を用いた。従って、合成波をあらためて

$$\Psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\delta) \qquad (5)$$

と書き直しすと、その振幅 A は

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ &= a\sqrt{\frac{5}{2}} \qquad (6)\end{aligned}$$

となる。　位相定数（初期位相）δ は

$$\begin{aligned} \tan\delta &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{3a}{2}\right)} \\ \to \tan\delta &= \frac{1}{3}\ [\delta=\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=0.322(\text{radian})\approx 18(\text{degree})]. \qquad (7)\end{aligned}$$

のように求まる。