

位置 x , 時刻 t の関数 $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$ が次の微分方程式 (1 次元波動方程式) を満たすことを以下のような手順で確認せよ。ただし、 A, k, v は x, t によらない定数である。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1)$$

1. 偏微分係数 $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ を計算せよ。
2. 偏微分係数 $\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ を計算せよ。
3. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ を計算せよ。

(解答例)

関数 $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$ は、位置 x , 時刻 t の関数である $k(x - vt)$ の合成関数とみなせるから、まず、 $k(x - vt) \equiv s$ において、偏微分係数 $\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial t}$ を求める。

$$\frac{\partial s}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -kv. \quad (2)$$

1. 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= A \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial \sin s}{\partial s} = Ak \cos s \\ &= Ak \cos k(x - vt), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= -Ak^2 \sin k(x - vt). \end{aligned} \quad (4)$$

2. 同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= A \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \sin s}{\partial s} = -Akv \cos s \\ &= -Akv \cos k(x - vt), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ &= -Ak^2 v^2 \sin k(x - vt). \end{aligned} \quad (6)$$

3. 前問までの結果を用いると

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

となる。すなわち、関数 $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$ は波動方程式を満たす。