[（３次元の球面波の一般解の例）filename=wave-3dim-2-qa081201.tex]

3 次元の球面波に対する波動方程式は、その波動関数 ψ が方位角度 θ, ϕ に依存せず、距離 r と時間 t だけに依存するので、波の位相速度を v として、次のように表される。

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1}$$

波動関数の候補として、定数 A, k, ω を含む次の関数形を考える。

$$\psi(r, \theta, \phi, t) \quad = \quad \frac{A}{r}\cos(kr - \omega t) \tag{2}$$

定数 v と k, ω の間に、どのような関係があれば、この関数が波動方程式を満たすことになるかを次の手順で考えよ。

1. 時間について 2 階の偏微分係数 $\partial^2\psi/\partial t^2$ を計算せよ。
2. 距離について 1 階の偏微分係数 $\partial\psi/\partial r$ を計算せよ。
3. 距離について 2 階の偏微分係数 $\partial^2\psi/\partial r^2$ を計算せよ。
4. 前問までの結果を式 (1) に代入して、v と k, ω の関係を求めよ。

(解答例)

1. 時間について 2 階の偏微分係数は次のようになる。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad = \quad -\omega^2\frac{A}{r}\cos(kr - \omega t). \tag{3}$$

2. 距離について 1 階の偏微分係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial r} &= \frac{A}{r^2}[-k\sin(kr - \omega t)\cdot r - \cos(kr - \omega t)] \\ &= -k\frac{A}{r}\sin(kr - \omega t) - \frac{A}{r^2}\cos(kr - \omega t).\end{aligned} \tag{4}$$

3. 距離について 2 階の偏微分係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} &= \frac{kA}{r^2}[k\cos(kr - \omega t)\cdot r - \sin(kr - \omega t)] - \frac{A}{r^4}[-k\sin(kr - \omega t)\cdot r^2 - \sin(kr - \omega t)\times 2r] \\ &= \frac{2A}{r^3}\cos(kr - \omega t) + \frac{2kA}{r^2}\sin(kr - \omega t) - \frac{k^2A}{r}\cos(kr - \omega t).\end{aligned} \tag{5}$$

4. 前問までの結果を式 (1) の左辺と右辺に代入すると

$$\begin{aligned}-\frac{\omega^2}{v^2}\frac{A}{r}\cos(kr - \omega t) &= -\frac{k^2A}{r}\cos(kr - \omega t) \\ \to v &= \frac{\omega}{k}.\end{aligned} \tag{6}$$

(備考：以上の解答例のように、2 次元球面波の場合と異なり、3 次元球面波の余弦関数（または正弦関数) を因子に持つ解は、近似的 (漸近的) にではなく、厳密に 3 次元波動方程式を満たす！）