[（2 次元波動方程式の球面波解）filename=wave-2dim-2-qa081218.tex]

2 次元空間におけるラプラス演算子 Δ は次のように定義される。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2},\ (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi). \tag{1}$$

ある関数

$$\psi(r,\phi,t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cdot \cos[k(r - vt) + \delta]\ (A, k, v, \delta : x, y, r, \phi, t \text{ に依らない定数}) \tag{2}$$

について次の問いに答えよ。

1. 三角関数の角度に相当する部分 $[k(r - vt) + \delta]$ を別の関数 s とおいて、偏微分 $\partial s/\partial r, \partial s/\partial t$ を計算せよ。
2. 前問の結果も用いて、偏微分 $\partial\psi/\partial r$ を計算せよ。
3. 同様に、$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r})$ を計算せよ。
4. 同様に、$\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$ を計算せよ。
5. 同様に、$\frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ を計算せよ。
6. 最後に、$v^2\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ を計算し、かつ、$r \to \infty$ の極限でどうなるか調べよ。

(解答例)

1. 題意より

$$\frac{\partial s}{\partial r} = k,\ \frac{\partial s}{\partial t} = -kv. \tag{3}$$

2. 同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial r} &= A\frac{d}{dr}(\frac{1}{\sqrt{r}}) \cdot \cos s + A\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\partial s}{\partial r}\frac{d\cos s}{ds} \\ &= -\frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{r^3}} \cdot \cos s - Ak\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \sin s.\end{aligned} \tag{4}$$

3. 同様に

$$\begin{aligned}r\frac{\partial\psi}{\partial r} &= -\frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \cos s - Ak\sqrt{r} \cdot \sin s \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) &= \frac{A}{4}\frac{1}{\sqrt{r^3}} \cdot \cos s + \frac{Ak}{2}\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \sin s - \frac{Ak}{2}\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \sin s - Ak^2\sqrt{r} \cdot \cos s \\ \to \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) &= A\left(\frac{1}{4}\frac{1}{r^2\sqrt{r}} - k^2\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\cos s.\end{aligned} \tag{5}$$

4. 題意より、波動関数 ψ には角度変数 ϕ は含まれていないから

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0. \tag{6}$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= A\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}\frac{d\cos s}{ds} = Akv\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sin s, &(7)\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= Akv\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}\frac{d\sin s}{ds} = -k^2v^2\frac{A}{\sqrt{r}}\cdot\cos s &(8)\end{aligned}$$

6.　以上、得られた結果を代入すると

$$\begin{aligned}v^2\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= Av^2\left(\frac{1}{4}\frac{1}{r^2\sqrt{r}} - k^2\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\cos s + Ak^2v^2\frac{1}{\sqrt{r}}\cos s\\ &= A\frac{v^2}{4r^2\sqrt{r}}\cos s \to 0 \text{ as } r\to\infty &(9)\end{aligned}$$

となり、$r\to\infty$ の極限で、与えられた波動関数は 2 次元の波動方程式を満たすことが示された。

備考：この問題の波動関数は方向に依らない（＝等方的な）波の解である。また、広い意味の振幅に相当する部分が $1/\sqrt{r}$ に比例するのはエネルギー保存則のためである。