[（2 次元波動方程式のの球面波解）filename=wave-2dim-2-qa061128d.tex]

2 次元の波動方程式が次のように与えられている。

$$\Delta\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\ (v : x, y, r, \phi, t \text{ に依らない定数（位相速度）}), \tag{1}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},\ (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi). \tag{2}$$

方向に依らない（＝等方的な）波動関数 $\psi(r, \phi, t) = A/\sqrt{r}\cdot\cos[k(r - vt) + \delta]$ $(A, k, \delta : x, y, r, \phi, t$ に依らない定数) が, 十分遠方では,2 次元の波動方程式の解であることを次の手順で確かめよ。

1. 位相 $[k(r - vt) + \delta]$ を別の変数 (関数)s とおいて、偏微分 $\partial s/\partial r, \partial s/\partial t$ を計算せよ。
2. 前問の結果も用いて、偏微分 $\partial\psi/\partial r$ を計算せよ。
3. 同様に、$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r})$ を計算せよ。
4. 同様に、$\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$ を計算せよ。
5. 同様に、$\frac{\partial\psi}{\partial t}, \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ を計算せよ。
6. 同様に、$\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ を計算し、$r \to \infty$ の極限でどうなるか調べよ。

(解答例)

1. 題意より

$$\frac{\partial s}{\partial r} = k,\ \frac{\partial s}{\partial t} = -kv. \tag{3}$$

2. 同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial r} &= A\frac{d}{dr}(\frac{1}{\sqrt{r}})\cdot\cos s + A\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial s}{\partial r}\frac{d\cos s}{ds} \\ &= -\frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{r^3}}\cdot\cos s - Ak\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sin s.\end{aligned} \tag{4}$$

3. 同様に

$$\begin{aligned}r\frac{\partial\psi}{\partial r} &= -\frac{A}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\cos s - Ak\sqrt{r}\cdot\sin s \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) &= \frac{A}{4}\frac{1}{\sqrt{r^3}}\cdot\cos s + \frac{Ak}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sin s - \frac{Ak}{2}\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sin s - Ak^2\sqrt{r}\cdot\cos s \\ \to \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) &= \frac{A}{4}\frac{1}{r^2\sqrt{r}}\cdot\cos s - Ak^2\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\cos s.\end{aligned} \tag{5}$$

4. 題意より、波動関数 ψ には角度変数 ϕ は含まれていないから

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = 0,\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0. \tag{6}$$

5.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = A\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}\frac{d\cos s}{ds} = Akv\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\sin s, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = Akv\frac{1}{\sqrt{r}}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}\frac{d\sin s}{ds} = -k^2v^2\frac{A}{\sqrt{r}}\cdot\cos s \tag{8}$$

6.　以上、得られた結果を代入すると

$$\begin{aligned}\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= -k^2\psi\times(1-\frac{1}{4k^2r^2}) + \frac{k^2v^2}{v^2}\psi \\ &= \frac{1}{4r^2}\psi \approx 0 \text{ as } r\to\infty\end{aligned} \tag{9}$$

となり、$r\to\infty$ の極限で、与えられた波動関数は 2 次元の波動方程式を満たすことが示された。