2次元、3次元の波動と波動方程式

われわれが日常観察する波動では、媒質は2次元または
3次元的な広がりをもっている。そこで、2次元、3次元的に分布している
媒質における波動方程式はどのように表されるかを考える。

目次

R. Okamoto, Kyushu Inst. Of Technology

Filename=波動（2，3次元）081114a.ppt

１．２次元の波動方程式

１次元の波動方程式

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\quad (v:\text{位相速度})$$

位置x, 時刻tにおける波の変位$\psi(x,t)$

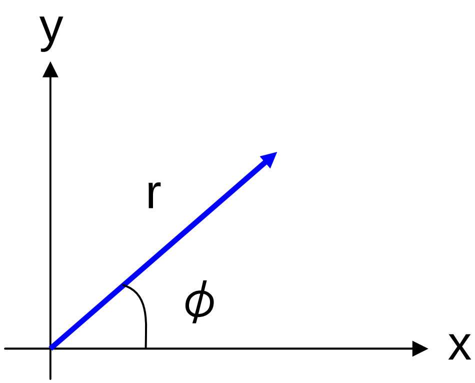
空間の等方性：x方向とy方向は特別な方向ではない

２次元の波動方程式（直交直線座標表示）

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\quad (v:\text{位相速度})$$

位置(x, y), 時刻tにおける波の変位$\psi(x,y,t)$

２．２次元の波動方程式の極座標表示



$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi; \quad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \phi} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{cases}$$

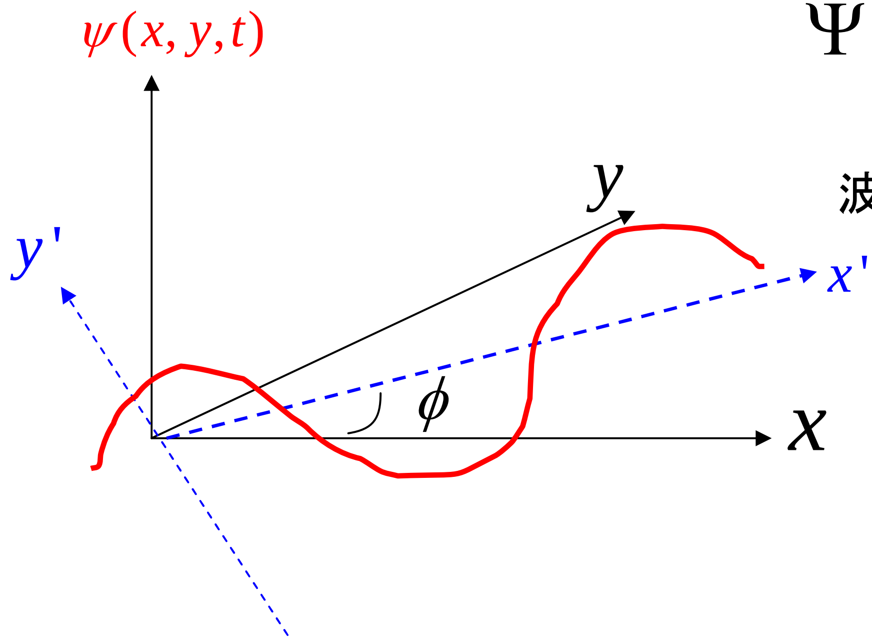
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)\psi + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \end{cases}$$

3. 2次元波動方程式の一般解(1)平面波

平面波:位相面が平面である波。波は特定の向きに進む。

波を観測する(考える)位置→位置ベクトル

波の進む向き→波数ベクトル



$$\Psi(x',t) \equiv A\sin(kx' - \omega t)$$

波の進行方向

座標変換
$$\begin{cases} x' = \quad x\cos\phi + y\sin\phi, \\ y' = -x\sin\phi + y\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} kx' &= kx\cos\phi + ky\sin\phi \\ &= x \cdot k\cos\phi + y \cdot k\sin\phi \\ &= \vec{r} \bullet \vec{k}, \end{aligned}$$

$$\vec{r} \equiv (x, y)$$;位置ベクトル

$$\vec{k} \equiv (k_x, k_y) \equiv (k\cos\phi, k\sin\phi)$$;波数ベクトル

$$k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$\Psi(x', t) = A\sin(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t)$$

$$\equiv \psi(x, y, t)$$

位相 $(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t)$一定の点の集合が

ベクトルkと直交する平行線(2次元空間における平面)となる

波動関数の複素数表示

$$\psi(x, y, t) = A\exp\left[\mathrm{i}(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t)\right] \;;\exp x \equiv \mathrm{e}^{x}$$

4．2次元波動方程式の一般解（2）球面波

2次元における球面波=円形波；方位角ϕによらない波動

十分遠方における解

$$\psi(r,\phi,t) \approx \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{r}}\cos(kr-\omega t+\varphi), \text{または} \\ \dfrac{A}{\sqrt{r}}\sin(kr-\omega t+\varphi), \text{または} \\ \dfrac{A}{\sqrt{r}}\exp\left[\mathrm{i}\,(kr-\omega t+\varphi)\right] \end{cases}$$

波源を中心にあらゆる方向に波はひろがる。単位時間あたりのエネルギーは保存
→2次元球面波の強さは距離に反比例する。

$$2\pi r\cdot I = \text{constant} \equiv C$$

$$\to I = \left(\frac{C}{2\pi}\right)\frac{1}{r}$$

波の強さは振幅の2乗に比例する→2次元球面波の振幅はrの平方根に反比例！

参考:2次元波動方程式の一般解

2次元波動方程式の極座標表示

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\cdots(1)$$

変数分離型の解(定常解)を求める

$$\psi(r,\phi,t)\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\cdot R(r)\cdot\Phi(\phi)\cdots(2)$$

(1) 式に(2)式を代入する;

$$-k^2R\Phi=\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)\cdot\Phi+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right)R\cdots(3)$$

両辺をRΦで割ると

$$-k^2=\left(\frac{R''+\frac{R'}{r}}{R}\right)\cdot+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\Phi''}{\Phi}\right)\cdots(4)$$

(4)式の左辺は定数で、右辺第一項はrだけに依存し、同第二項はϕだけに依存する。

式(4)が恒等的に成立するためには、右辺の2つの項がそれぞれ定数でなければならない。

$$\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv -m^2 \cdots (5)$$

と置き、角度の周期性を考慮すると

$$\Phi(\phi) = \mathrm{e}^{im\phi}, \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \to m : \text{整数} \cdots (6)$$

(6)式を(4)式に代入すると

$$R'' + \frac{R'}{r} + (k^2 - \frac{m}{r^2})R = 0 \cdots (7), \quad R' \equiv \frac{dR}{dr}$$

変数を無次元化するために、変数sを導入

$$kr \equiv s \to \frac{d}{dr} = k\frac{d}{ds}, \quad R(r) = R(s/k) \equiv u(s) \cdots (8)$$

(8)式を(7)式に代入すると

$$\boxed{u'' + \frac{u'}{s} + (1 - \frac{m^2}{s^2})u = 0 \cdots (9) \quad \text{(m次の)ベッセル微分方程式}}$$

ベッセル微分方程式の一般解

2階の線形微分方程式であるから、線形独立な2つの解が存在する。しかし、解を議論する状況（系）に応じて、解のさまざまな表現が使われている。

第1種ベッセル関数

$$J_m(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+m}, J_{-m}(s) = (-1)^s J_m(s),$$

$$\Gamma(n+1) = n!;\text{ガンマ関数}$$

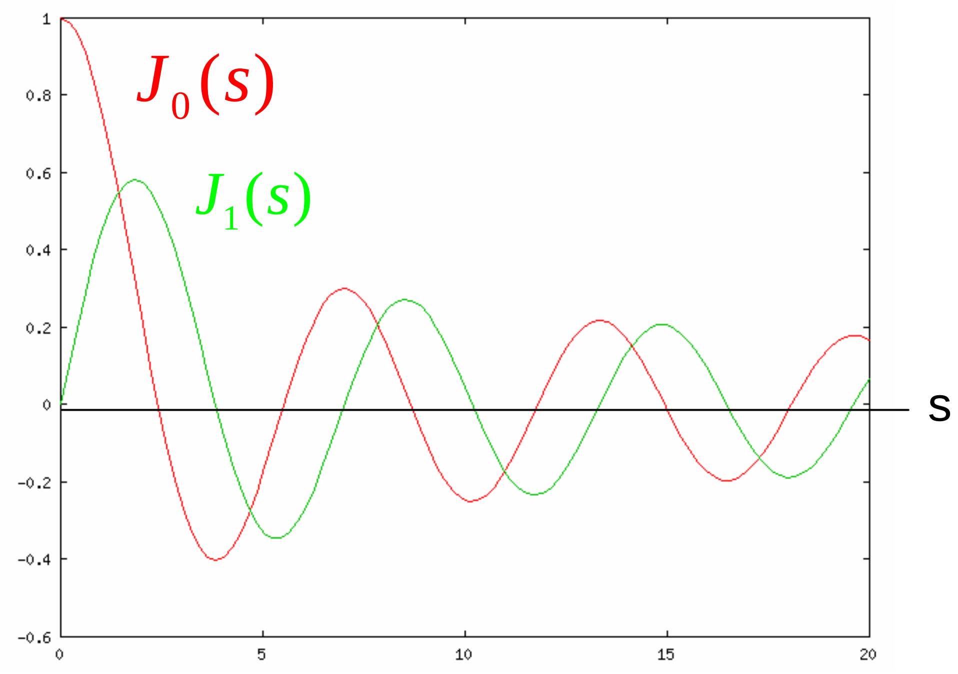
第２種ベッセル関数

$$Y_m(s) \equiv \frac{J_m(s)\cos(m\pi) - J_{-m}(s)}{\sin(m\pi)}, Y_{-m}(s) = (-1)Y_m(s)$$

十分大きな変数sに対する、m=0,1に対する近似式

$$J_0(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos(s - \tfrac{\pi}{4}),$$

$$J_1(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos(s - \tfrac{3\pi}{4}) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sin(s - \tfrac{\pi}{4})$$



５．３次元の波動方程式

１次元の波動方程式

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (v:\text{位相速度})$$

位置x, 時刻tにおける波の変位$\psi(x,t)$

$$\Downarrow$$

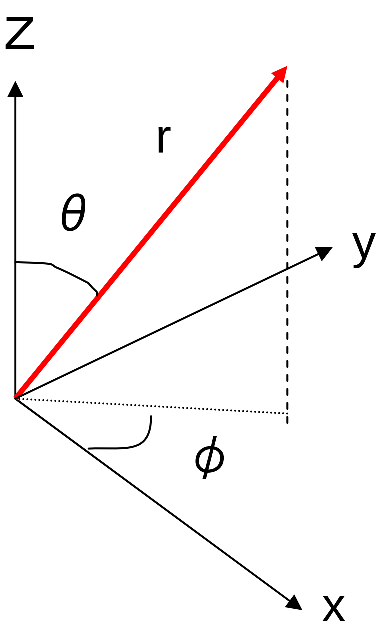
空間の等方性：x方向、y方向とz方向は互いに平等

３次元の波動方程式〔直交直線座標表示）

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \quad (v:\text{位相速度})$$

位置(x, y, z), 時刻tにおける波の変位$\psi(x, y, z, t)$

６．３次元の波動方程式の極座標表示



$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta;$$

$$\rightleftarrows \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \tan\phi = \frac{y}{x},\ \tan\theta = \frac{r}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\phi}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\phi}\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\phi}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\phi}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \end{array} \right.$$

7. 3次元における平面波

$\vec{r} \equiv (x, y, z)$;位置ベクトル

$\vec{k} \equiv (k_x, k_y, k_z) \equiv (k \sin\theta \cos\phi, k \sin\theta \sin\phi, k \cos\theta);$

波数ベクトル

$$k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\psi(x, y, t) = \begin{cases} A\cos(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t), \text{または} \\ A\sin(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t), \text{または} \\ A\exp\left[\mathrm{i}(\vec{k} \bullet \vec{r} - \omega t) \right] \end{cases}$$

８．３次元における球面波

３次元における球面波

$$\psi(r,\theta,\phi,t)=\begin{cases}\dfrac{A}{r}\cos(kr-\omega t+\varphi),\text{または}\\ \dfrac{A}{r}\sin(kr-\omega t+\varphi),\text{または}\\ \dfrac{A}{r}\exp\left[\mathrm{i}\,(kr-\omega t+\varphi)\right]\end{cases}\qquad A,\varphi:\text{定数}$$

波源を中心にあらゆる方向に波はひろがる。単位時間あたりのエネルギーは保存

→3次元球面波の強さは距離2乗に反比例する。

$$4\pi r^2\cdot I=\mathrm{constant}\equiv C$$

$$\to I=\left(\frac{C}{4\pi}\right)\frac{1}{r^2}$$

波の強さは振幅の2乗に比例する→3次元球面波の振幅はrに反比例！