

理想気体の 1 モルの (圧力、体積) が (P_1, V_1) から (P_2, V_2) へ変化する場合、この気体の内部エネルギー変化 ΔU が

$$\Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} \quad (1)$$

と表わされることを示せ。ただし、 $\gamma (> 1)$ は気体の比熱比である。

(解答例)

熱力学第一法則により、気体が外界から吸収する熱量 Q 、気体が外界にする仕事 W と気体の内部エネルギーの変化 ΔU の間に次の関係式

$$\Delta U = Q - W \quad (2)$$

が成立する。一方、1 モルの理想気体は状態方程式

$$PV = RT \quad (R : \text{気体定数}) \quad (3)$$

を満たす。理想気体の内部エネルギーは絶対温度だけの関数で、1 モルの場合、定積モル比熱 C_v により

$$U = C_v T + \text{constant} \quad (4)$$

と表される。さらに、理想気体の定圧モル比熱 C_p 、定積モル比熱 C_v は次の性質 (マイヤーの関係式) を満たす。

$$C_p - C_v = R. \quad (5)$$

式 (4) の両辺において温度変化 ΔT に対応する有限の変化を考えると

$$\Delta U = C_v \Delta T \quad (6)$$

となる。題意より、初めと終わりの状態における温度を T_1, T_2 として、式 (3) を用いると

$$P_1 V_1 = RT_1, \quad (7)$$

$$P_2 V_2 = RT_2 \quad (8)$$

となる。ここで、 $\Delta T = T_2 - T_1$ とおくことができる。この関係と式 (5) を式 (6) に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta U &= C_v \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{R} \\ &= \left(\frac{C_v}{C_p - C_v} \right) (P_2 V_2 - P_1 V_1) \\ &= \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

よって、証明された。