(群速度 1-filename=groupvelocity-1-qa061128.tex

平面波は空間的に無限に広がっているので、物体（粒子）の描像とは関連がつかないし、物理的信号を伝えることはできない。そこで、波数 k と (角) 振動数 ω が少し異なる二つの平面波を合成して、波束をつくり、その群速度を求める。次の手順で答えよ。

1. x 軸の正の向きに進行する二つの平面正弦波が次のように与えられている。

$$\Psi_1(x,t) = A\sin(k_1x-\omega_1t-\phi_1), \tag{1}$$
$$\Psi_2(x,t) = A\sin(k_2x-\omega_2t-\phi_2). \tag{2}$$

これらの二つの波の合成波 $\Psi(x,t)=\Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)$ を三角関数の和と差と積の公式を使って計算せよ。ただし、次のように定義される平均値と差を用いよ。

$$\frac{k_1+k_2}{2}\equiv k,\ \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\equiv\omega,\ \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\equiv\phi, \tag{3}$$
$$k_1-k_2\equiv\Delta k,\ \omega_1-\omega_2\equiv\Delta\omega,\ \phi_1-\phi_2\equiv\Delta\phi. \tag{4}$$
$$|\Delta k|\ll k,\ \ |\Delta\omega|\ll\omega. \tag{5}$$

2. 群速度 $v_{\rm group}$ と位相速度 $v_{\rm phase}$ を求めよ。

(解答例)

1. 合成波

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \Psi_1(x,t)+\Psi_2(x,t)\\ &= A\sin(k_1x-\omega_1t-\phi_1)+A\sin(k_2x-\omega_2t-\phi_2)\\ &= 2A\cos\left[(\frac{\Delta k}{2})x-(\frac{\Delta\omega}{2})t-(\frac{\Delta\phi}{2})\right]\cdot\sin(kx-\omega t-\phi),\end{aligned} \tag{6}$$

(公式： $$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})) \tag{7}$$

$$= 2A\cos\left[\frac{\Delta k}{2}(x-\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t)-(\frac{\Delta\phi}{2})\right]\cdot\sin(kx-\omega t-\phi) \tag{8}$$

2. ここで、合成波をグラフに描くと空間的に局在した波（＝波束：音波の場合のうなりに相当）であることがわかる。$|\Delta k|\ll k,\ |\Delta\omega|\ll\omega$ であることを考えれば、sin 関数以外の因子はゆっくり変化する「振幅」とみなすことができる。この局在した波 (の振幅) の進む速度（＝群速度、物理的信号の伝播速度）は

$$v_{\rm group}\equiv\frac{\Delta\omega}{\Delta k},\ \ (\text{一般には }\frac{d\omega}{dk}) \tag{9}$$

であり、位相速度は

$$v_{\rm phase}=\frac{\omega}{k} \tag{10}$$

である。