[断熱変化における重要な関係式導出１]adiabatic-change1-qa090109.tex

理想気体の断熱変化において、その圧力を $P$ , 体積を $V$ とすると $PV^\gamma = \text{constant}$ の関係があることを証明せよ。ただし、$C_p$ は定圧比熱、$C_v$ は定積比熱として、比熱比 $\gamma$ は $\gamma \equiv C_p/C_v$ と定義される。

(解答例) まず簡単のために、理想気体の物質量が 1 モルの場合について考え、一般に $n$ モルの場合には、別解として考察する。

1. 理想気体の物質量が 1 モルの場合
理想気体 1 モルについては、理想気体の絶対温度を $T$ とすると、気体定数を $R$ として次のような関係が成立する。

$$\begin{aligned} PV &= RT \quad \text{（状態方程式）}, & (1) \\ C_p - C_v &= R\text{（マイヤーの法則）}. & (2) \end{aligned}$$

理想気体の内部エネルギー $U$ は

$$U = C_vT + \text{constant} \tag{3}$$

と表されるので、その微小変化について

$$dU = C_v dT \tag{4}$$

が成り立つ。また、断熱変化の場合に、熱力学第一法則を適用すると

$$dU = -PdV \tag{5}$$

が成立する。（気体が外界にする力学的な仕事が $PdV$ となること、外界が気体にする仕事が $-PdV$ となること注意する。）
ここで、式（1）において、それぞれの物理量が微小変化する場合を考えると

$$(P + dP)(V + dV) = R(T + dT) \tag{6}$$

が成立する。式（6）を式 (1) を代入し、2 次の微小量は高次の微小量として無視できると考えると、

$$PdV + VdP = RdT \tag{7}$$

が得られる。式 (4),（5）を（7）に代入し、さらに（2）を用いると

$$\begin{aligned} PdV + VdP &= R\frac{(-)PdV}{C_v} \\ &= -\frac{(C_p - C_v)}{C_v}PdV \\ &= -(\gamma - 1)PdV & (8) \end{aligned}$$

が得られる。これを整理して

$$\gamma P dV + V dP = 0 \tag{9}$$

が得られる。さらに、式（9）の両辺を $PV$ で割ると

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \tag{10}$$

となる。ここで、式（10）をそれぞれの変数で積分すると

$$\begin{aligned} \gamma \log_e V + \log_e P &= \text{constant} \\ \rightarrow PV^{\gamma} &= \text{constant} \end{aligned} \tag{11}$$

が得られる。ここで、積分公式

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + \text{constant} \tag{12}$$

を用いた。

2. 理想気体の物質量が $n$ モルの場合
理想気体 $n$ モルについては、理想気体の絶対温度を $T$ とすると、気体定数を $R$ として次のような関係が成立する。

$$PV = nRT \quad \text{（状態方程式）}, \tag{13}$$

$$C_p - C_v = nR \text{（マイヤーの法則）}. \tag{14}$$

理想気体の内部エネルギー $U$ は

$$U = nC_vT + \text{constant} \tag{15}$$

と表されるので、その微小変化について

$$dU = nC_v dT \tag{16}$$

が成り立つ。また、断熱変化の場合に、熱力学第一法則を適用すると

$$dU = -P dV \tag{17}$$

が成立する。（気体が外界にする力学的な仕事が $PdV$ となること、外界が気体にする仕事が $-PdV$ となること注意する。）
ここで、式（13）において、それぞれの物理量が微小変化する場合を考えると

$$(P + dP)(V + dV) = nR(T + dT) \tag{18}$$

が成立する。式（18）を式 (13) を代入し、2 次の微小量は高次の微小量として無視できると考えると、

$$P dV + V dP = nR dT \tag{19}$$

が得られる。式 (16),（17）を（19）に代入し、さらに（14）を用いると

$$\begin{aligned} PdV + VdP &= nR\frac{(-)PdV}{C_v} \\ &= -\frac{(C_p - C_v)}{C_v}PdV \\ &= -(\gamma - 1)PdV \end{aligned} \tag{20}$$

が得られる。これを整理して

$$\gamma PdV + VdP = 0 \tag{21}$$

が得られる。さらに、式（21）の両辺を $PV$ で割ると

$$\gamma\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \tag{22}$$

となる。ここで、式（22）をそれぞれの変数で積分すると

$$\begin{aligned} \gamma \log_e V + \log_e P &= \text{constant} \\ \rightarrow PV^{\gamma} &= \text{constant} \end{aligned} \tag{23}$$

のように、$n$ モルの場合も 1 モルの場合と同じ結果 (同じ形の関係式) が得られる。