

理想気体 1 モルの断熱変化において、その圧力を  $P$  , 体積を  $V$  とすると  $PV^\gamma = \text{constant}$  の関係があることを証明せよ。ただし、 $C_p$  は定圧比熱、 $C_v$  は定積比熱であり、比熱比  $\gamma$  は  $\gamma \equiv C_p/C_v$  と定義される。

(解答例)

理想気体 1 モルについては、理想気体の絶対温度を  $T$  とすると、気体定数を  $R$  として次のような関係が成立する。

$$PV = RT \quad (\text{状態方程式}) \quad (1)$$

$$C_p - C_v = R \quad (\text{ルニヨールの法則}). \quad (2)$$

理想気体の内部エネルギー  $U$  は

$$U = C_v T + \text{constant} \quad (3)$$

と表されるので、その微小変化について

$$dU = C_v dT \quad (4)$$

が成り立つ。また、断熱変化の場合に、熱力学第一法則を適用すると

$$dU = -PdV \quad (5)$$

が成立する。( 気体が外界にする力学的な仕事が  $PdV$  となること、外界が気体にする仕事が  $-PdV$  となること注意する。)

ここで、式 (1) において、それぞれの物理量が微小変化する場合を考えると

$$(P + dP)(V + dV) = R(T + dT) \quad (6)$$

が成立する。式 (6) を式 (1) を代入し、2 次の微小量は高次の微小量として無視できると考えると、

$$PdV + VdP = RdT \quad (7)$$

が得られる。式 (4), (5) を (7) に代入し、さらに (2) を用いると

$$\begin{aligned} PdV + VdP &= R \frac{(-)PdV}{C_v} \\ &= -\frac{(C_p - C_v)}{C_v} PdV \\ &= -(\gamma - 1)PdV \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。これを整理して

$$\gamma PdV + VdP = 0 \quad (9)$$

が得られる。さらに、式 ( 9 ) の両辺を  $PV$  で割ると

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \quad (10)$$

となる。ここで、式 ( 10 ) をそれぞれの変数で積分すると

$$\begin{aligned} \gamma \log_e V + \log_e P &= \text{constant} \\ \rightarrow PV^\gamma &= \text{constant} \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。ここで、積分公式

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + \text{constant} \quad (12)$$

を用いた。