

1. 初め温度が T_0 である理想気体の体積が断熱的に3倍に膨張した。比熱比を γ , 気体定数を R として、この気体のする仕事 W を γ, R, T_0 で表す関係式を求めよ。ただし、断熱変化の場合、理想気体の圧力 p , 体積 V の間に、 $pV^\gamma = \text{constant}$ (ポアソンの法則) が成立する。
2. 1 mol(モル)の理想気体が初め温度 25C で、 $\gamma = 1.40$ であるとき、気体が(外界に)した仕事を計算せよ ([joule])。ただし、 $R = 8.3145 \text{ joule } / (\text{K} \cdot \text{mol})$ とする。

(解答例)

1. 初めの体積, 圧力 (V_0, p_0), 終わりの体積 (V, p), 今は $V = 3V_0$ の場合に気体が外部に行う仕事 W

$$W = \int_{V_0}^V p dV. \quad (1)$$

断熱変化であるからポアソンの法則より、 $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ を式(1)に代入して

$$\begin{aligned} W &= p_0V_0^\gamma \int_{V_0}^{3V_0} V^{-\gamma} dV = \frac{p_0V_0^\gamma}{1-\gamma} \{(3V_0)^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\} \\ &= \frac{p_0V_0^\gamma}{1-\gamma} (3^{1-\gamma} - 1)V_0^{1-\gamma} = \frac{3^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} p_0V_0 \\ &= \frac{1 - 3^{1-\gamma}}{\gamma - 1} RT_0 \end{aligned} \quad (2)$$

2. 与えられた具体的な値を式(2)代入して

$$\begin{aligned} W &= \frac{1 - 3^{-0.4}}{0.4} \times 8.3145 \frac{\text{joule}}{\text{K}} \times (273 + 25)\text{K} \\ &= 2203 \text{ joule} \end{aligned} \quad (3)$$

3. 第一問の別解:

熱力学第一法則を断熱過程に適用すると、

$$\Delta U = Q - W = -W, \quad (4)$$

$$W = -\Delta U = -C_v(T - T_0), \quad (5)$$

となる。ここで、理想気体では $U = C_vT + \text{constant}$ であることを用いた。一方、断熱過程の場合、 $pV^\gamma = \text{constant}$ に状態方程式 $pV = RT$, $p_0V_0 = RT_0$ を代入して $TV^{\gamma-1} = T_0V_0^{\gamma-1}$ となる。これらより

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1}. \quad (6)$$

理想気体の性質 (マイヤーの法則) $C_p - C_v = R$ より $C_v = R/(\gamma - 1)$ となるので

$$W = \frac{R}{\gamma - 1} (T_0 - T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1}) = \frac{1 - 3^{1-\gamma}}{\gamma - 1} RT_0. \quad (7)$$