# Nuclear Reaction in Few-Body Systems

Hiroyuki Kamada

*Institute of theoretical Physics II, Ruhr-University Bochum, D44780 Bochum, Germany*

Abstract

Increasing number of nucleon from two to three or four in light nuclei, how much effects of many-body interactions appear in the systems, is of interest for our few-body problems. The Faddeev formalism of the three-nucleon scattering is briefly introduced. Recent progresses of the 3N scattering in high energy region are shown. The application, for example, the electron scattering on $^3$He, the alpha particle of four-nucleon system and the hyper triton are discussed.

# 少数多体系における原子核反応

ルール大学 第二理論物理　鎌田 裕之

email: kamada@hadron.tp2.ruhr-uni-bochum.de

アブストラクト

少数多体系における原子核物理学の興味は、粒子数（核子数や他の粒子の数）を増やすことにより、多体効果がどのように現れてくるか、又、様々なモデルによって求められてきた２核子間のポテンシャルが、３核子系や４核子系ではどの程度有効であるかを定量的に調べることである。これは、数学の Consistency（無矛盾性）の概念とは単純には異にするが、科学全般に渡って最も大切な考え方の一つである。最も典型的な場合、それは２核子間の Potential を用いて３核子系がどれ程説明できるかを問うものである。また、３体系で新しく現れる３体力がどのようなものなのかを解説していきたい。講義では、２体の Lippmann-Schwinger 積分方程式から始め、Faddeev ３体理論を簡単に紹介する。また、最近の高エネルギー核子-重陽子散乱実験について、Δアイソバーによる３体力の効果が現れていることについて述べる。更に、$^3$He 核を標的とする電子散乱や４体問題、Hyper 核への応用についてもふれる。

## はじめに

原子核における少数多体系の直接的な課題は、２核子間に働く核力だけではなく、３核子や４核子の系に働く３体力４体力が、どのようなものなのかを現象論的なレベルから、中間子論的な考察のもとに調べ、それを定量的に研究することである。よく知られているように、２核子間に働く現実的核力は、古典的な中心力だけでなく強い斥力芯、強いテンソル力、軌道スピン力といった様々な特徴をもっている。このような性質が数個の核子系の核反応に、どのように現れて来るのかを調べることは興味深い。

この講義ノートでは、物理学科の学部卒業生の程度の知識で読めるように配慮したつもりである。また、これを書くにあたって、砂川重信氏の著書 [1] と W. Glöckle の著書

[2, 3] が基盤になっているので、読者はそれを参考にされたい。１章では、基礎的な２体問題を運動量空間で記述することを考え、Lippmann-Schwinger 方程式及び、部分波の記述について述べる。２章において、３体理論を展開する。束縛系における Faddeev 理論の概要と具体的なトリトン（３重水素原子核）の波動関数の求め方を説明し、３体力とはどんなものなのかを核子の内部励起（Δアイソバー）の考え方から紹介する。３章では、３体散乱における Faddeev 理論をもう一度考えなおし、３体散乱方程式を定式化し、その具体例として、最近の高エネルギー核子-重陽子弾性散乱の３体力の効果についての成果を示す。４章では、３核子系から、更に４核子系へのアプローチや、電子散乱、ハイパー核への応用の紹介をする。ここでは、非相対論的な枠組みで理論を展開する。

# 1　２核子系

どのように核子-核子散乱を記述するか？

## １．１ 散乱過程のリップマン-シュウィンガー方程式

$\vec{k}_1$と$\vec{k}_2$を独立な核子の運動量とした場合、相対的な運動量は、

$$\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \tag{1}$$

と与えられ、運動量の固有状態は、

$$|\vec{p}> \tag{2}$$

で書き表す。これは、

$$<\vec{p} \mid \vec{p'}>= \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) \tag{3}$$

により規格化することができ、その固有状態は

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{m} \tag{4}$$

の相対運動の自由ハミルトニアンより与えられる。$m$ は核子の質量である。ここで、$V$ を核子間のポテンシャルとすれば、散乱のシュレディンガー方程式は次のように与えらる。

$$(H_0 + V)\Psi^{(+)}_{\vec{p}} = E\Psi^{(+)}_{\vec{p}} \tag{5}$$

これから積分方程式即ち、リップマン-シュウィンガー( Lippmann-Schwinger )方程式( LSE )が導かれる。[4]

$$(H_0 - E)\Psi^{(+)}_{\vec{p}} = -V\Psi^{(+)}_{\vec{p}} \tag{6}$$

$$\Psi_{\vec{p}}^{(+)} = |\ \vec{p} > + \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} V |\Psi_{\vec{p}}^{(+)} > \tag{7}$$

先ず、座標空間表示で考えることにしよう。 運動量 $\vec{p}$ に対応する共役な座標は

$$\vec{x} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{8}$$

であるから、これも同様に規格化ができる。

$$< \vec{x}|\vec{x'} >= \delta^3(\vec{x} - \vec{x'}) \tag{9}$$

この規格化によって、

$$< \vec{x}|\vec{p} >= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{10}$$

という平面波を関数化できる。さて、このことを使って座標空間での自由グリーン関数 $G_0$ を導いてみよう。

$$G_0 = \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
< \vec{x}|\frac{1}{E + i\epsilon - H_0}|\vec{x'} > &= \int d\vec{p} < \vec{x}|\vec{p} > \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} < \vec{p}|\vec{x'} > \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} e^{-\vec{p}\cdot\vec{x'}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x'})} \frac{1}{E + i\epsilon - H_0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dpp^2 j_0(p|\vec{x} - \vec{x'}|) \frac{1}{E + i\epsilon - H_0}
\end{aligned} \tag{12}$$

これを、通常の方法で計算すれば、

$$< \vec{x}|G_0|\vec{x'} >= -\frac{m}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{mE}|\vec{x}-\vec{x'}|}}{|\vec{x} - \vec{x'}|} \tag{13}$$

を得る。これは、$\vec{x'}$から $\vec{x}$の出ていく波動を表し、これを使えば、座標表示での LSE は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
< \vec{x}|\Psi_{\vec{p}}^{(+)} > &\equiv \Psi_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \frac{m}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{i\sqrt{mE}|\vec{x}-\vec{x'}|}}{|\vec{x} - \vec{x'}|} V(x') \Psi_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{x'})
\end{aligned} \tag{14}$$

さて、ここで局所的ポテンシャルを仮定し、

$$< \vec{x}|V|\vec{x'} >= \delta^3(\vec{x} - \vec{x'}) V(x') \tag{15}$$

漸近的な振舞いとして $|x| \to \infty$ の極限をとることによって、散乱波は次のように書ける。

$$\Psi_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{x}) \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ipx}}{x} f(\hat{x})) \tag{16}$$

$f(\hat{x})$ は $\vec{x}$ の方向にだけ依存する関数で、散乱振幅と呼ぶ。これを局所的ポテンシャル $V$ を使い、具体的に表せば、

$$f(\hat{x}) = -m\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int d^3x' e^{i\vec{p'}\cdot\vec{x'}} V(x') \Psi_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{x'}) \tag{17}$$

となり、このことから散乱後の運動量は$\vec{p'}$と解釈できる。

$$\vec{p'} \equiv \hat{x}p \tag{18}$$

ここで、遷移振幅 $t$ を導入しよう。

$$\begin{aligned} <\vec{p'}|t|\vec{p}> &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x' e^{i\vec{p'}\cdot\vec{x'}} V(x') \Psi_{\vec{p}}^{(+)} \\ &= <\vec{p'}|V|\Psi_{\vec{p}}^{(+)}> \end{aligned} \tag{19}$$

この $t$ を用いれば、全ての散乱のオブザーバブル（測定量）を得ることができる。実は、この遷移振幅 $t$ は積分方程式から直接求めることができる。（19）式を使って

$$t|\vec{p}> \equiv V|\Psi_{\vec{p}}^{(+)}> \tag{20}$$

と書けることに気付けば、（7）式は

$$\begin{aligned} t|\vec{p}> &= V|\vec{p}> + VG_0V|\Psi_{\vec{p}}^{(+)}> \\ &= V|\vec{p}> + VG_0t|\vec{p}> \end{aligned} \tag{21}$$

と式変形されて、$|p>$ を更に省くことをすれば、

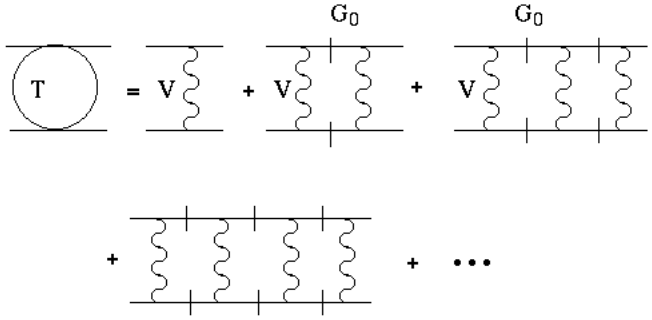
$$t = V + VG_0t \tag{22}$$

を得る。この表記を LSE のオペレーター表示という。

次に、$t$ の簡単な物理的な解釈を考えてみよう。

$$\begin{aligned} t &= V + VG_0(V + VG_0t) \\ &= V + VG_0V + VG_0VG_0V + VG_0VG_0VG_0V + \ldots \end{aligned} \tag{23}$$

これは、$V$ の相互作用によるボルン級数と呼ばれるもので、$V$ の冪の順に和を取ったものである。それぞれの項は $V$ と $G_0$ が交互に現れ、粒子数を増やしてもこの構造は一般的である。それを、もっと視覚化すれば、多重散乱のイメージが理解できる。




ここで、波線は $V$ による相互作用を表し、横に水平に引いた２つの線は自由グリーン関数 $G_0$を表している。明らかに、（ 23 ）式から

$$t \equiv V + VG_0V + VG_0VG_0V + VG_0VG_0VG_0V + \ldots \tag{24}$$

と書ける。この様に逆に $t$ を定義して、（ 22 ）の LSE を導くことができる。

$$t = V + VG_0(V + VG_0V + VG_0VG_0V + \ldots) \tag{25}$$

$$t = V + VG_0t \tag{26}$$

これらの多重散乱の級数展開の方法はより一般的で、相対論的な LSE の Bethe-Salpeter 方程式の場合にも通じる。

## １．２ 束縛状態の リップマン - シュウィンガー方程式

相互作用 $V$ によって２核子系に束縛状態があるものと仮定する。この時、その固有エネルギーは負である。

$$(H_0 + V)|\Psi_b >= E_b|\Psi_b > \tag{27}$$

$$(H_0 - E_b)|\Psi_b >= -V|\Psi_b > \tag{28}$$

エネルギーが負であることから、この方程式の左辺にゼロ点を持たないので、２乗可積分の解が存在し、次のような非斉次項を持たない斉次 LSE 方程式を得る。

$$|\Psi_b >= \frac{1}{E_b - H_0}V|\Psi_b > \tag{29}$$

座標表示で、（ 13 ）式をエネルギーが負であることに注意し、

$$\Psi_b(\vec{x}) = -m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int d^3x' \frac{e^{-\sqrt{m|E_b|}|\vec{x}-\vec{x'}|}}{|\vec{x}-\vec{x'}|}V(x')\Psi_b(\vec{x'}) \tag{30}$$

と求まる。この表式から、明かに距離の大きな所では指数関数的に減衰することが直接理解できる。

## １．３ リップマン-シュウィンガー方程式における斉次性と非斉次性の関係

不連続状態、即ち束縛状態に対し斉次方程式が成り立ち、

$$|\Psi_b>= G_0(E_b)V|\Psi_b> \tag{31}$$

正のエネルギー状態、つまり散乱状態に対しては非斉次方程式が成り立った。

$$t(E) = V + VG_0(E)t(E) \tag{32}$$

この遷移演算子 $t(E)$ は エネルギーが負の場合にも成り立つ。それでは、エネルギーが束縛に近付いた場合、いったい何が起っているのだろうか ?( 32 ) 式を書き直してみれば、

$$(1 - VG_0(E))t(E) = V \tag{33}$$

$$t(E) = (1 - VG_0)^{-1}V \tag{34}$$

であり、これを級数展開してみよう。

$$\begin{aligned} t(E) &= (1 + VG_0 + VG_0VG_0 + \ldots)V \\ &= V(1 + G_0V + G_0VG_0V + \ldots) \end{aligned} \tag{35}$$

と書ける。ここで、エネルギーを束縛状態のエネルギーにとり、$t$ を束縛状態に作用させると、

$$t(E_b)|\Psi_b>= V(1 + 1 + 1 + \ldots)|\Psi_b> \tag{36}$$

となるので、明かに発散する。これを、もう少し正確に扱ってみよう。( 33 ) 式から、

$$\begin{aligned} t(E) &= [(G_0^{-1} - V)G_0]^{-1}V \\ &= G_0^{-1}\frac{1}{E - H_0 - V}V \end{aligned} \tag{37}$$

を得る。ここで、関数系の完備性

$$|\Psi_b><\Psi_b| + \int d\vec{p}|\Psi_{\vec{p}}^{(+)}><\Psi_{\vec{p}}^{(+)}| = 1 \tag{38}$$

の関係式を ( 37 ) 式に挿入すれば、

$$t(E) = (E - H_0)|\Psi_b>\frac{1}{E - H_0}<\Psi_b|V + \int d\vec{p}(E - H_0)|\Psi_b>\frac{1}{E - p^2/m}<\Psi_{\vec{p}}^{(+)}|V \tag{39}$$

と書けて、$t(E)$ が明かに $E = E_b$で特異点 ( Singularity ) を持つことが分る。すなわち、

$$\begin{aligned} t(E) &\rightarrow V|\Psi_b>\frac{1}{E - E_b}<\Psi_b|V \\ E &\rightarrow E_b \end{aligned} \tag{40}$$

これによって、非斉次方程式（ $22$ ）の斉次な部分が解をもつことが分り、それを$\Theta$とすれば、

$$\Theta(E) = VG_0(E)\Theta(E) \tag{41}$$

を満し、

$$\Theta(E) = V\chi(E) \tag{42}$$

のように、 $\chi$ を使えば、

$$\chi(E) = G_0V\chi(E) \tag{43}$$

これは、（ $31$ ）式そのものである。結局、$E = E_b$ の解

$$\chi(E_b) \;\; = \;\; \Psi_b \tag{44}$$

である。この $t$ の特異点は束縛状態に現れ、後述する 3 体系やそれ以上の少数多体系で重要な役割りを果す。

### １．４ 運動量表示における部分波表現

運動量空間での基底を、一定の量子の軸に対して、軌道角運動量 $l$ とその磁気量子数 $m$ を用いて表す。

$$|plm> \tag{45}$$

したがって、（ $1$ ）のベクトルは（ $45$ ）によって表せて、またその正規直交規格化の関係は、

$$\begin{aligned} <\vec{p'}|plm> &\equiv \frac{\delta(p'-p)}{pp'}Y_{lm}(\hat{p'}) \\ \sum_{lm}\int dpp^2|plm><plm| &= 1 \\ <plm|p'l'm'> &= \frac{\delta(p'-p)}{pp'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \end{aligned} \tag{46}$$

となる。従って、部分波の基底を使った LSE を記述することができる。

$$\begin{aligned} & <p'l'm'|t(E)|plm> = <p'l'm'|V|plm> \\ + & \sum_{l''m''}\int_0^\infty dp''p''^2 <p'l'm'|V|p''l''m''> \frac{1}{E+i\epsilon-p''^2/m} <p''l''m''|t(E)plm> \end{aligned} \tag{47}$$

簡単のために量子の軸の周りの回転に対して不変なポテンシャルを考えよう。

$$<p'l'm'|V|plm> = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{48}$$

この場合、( 47 ) 式は 1 変数の積分方程式になる。

$$t_l(p,p') =< p'l'm'|V|plm > + \int_0^\infty dp'' p''^2 V_l(p,p'') \frac{1}{E + i\epsilon - p''^2/m} t_l(p'',p') \tag{49}$$

ここで、$V_l(p,p')$ とは、通常の $V(r)$ からどの様に導けるのか？運動量空間と同様に座標空間においても部分波基底が定義でき、

$$|rlm > \tag{50}$$

( 46 ) 式と同じようにベクトルを表現できる。

$$< \vec{x}|rlm >\equiv \frac{\delta(x-r)}{xr} Y_{lm}(\hat{x}) \tag{51}$$

従って、

$$\begin{aligned} < plm|rlm > &= \int d\vec{p'} \int d\vec{x} < plm|\vec{p'} >< \vec{p'}|\vec{x} >< \vec{x}|rlm > \\ &= \int d^3p' \int d^3x \frac{\delta(p'-p)}{pp'} Y_{lm}(\hat{p'})^* \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{p'}\cdot\vec{x}} \frac{\delta(x-r)}{xr} Y_{lm}(\hat{x}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(pr) i^l \end{aligned} \tag{52}$$

により、部分波同士の内積を表し、これは( 10 )式に対応する。次に、これを使って $V_l(p,p')$ を $V(r)$ から具体的に計算する方法を示す。

$$\begin{aligned} V_l(p,p') &= < p'lm|V|plm > \\ &= \int_0^\infty drr^2 \int_0^\infty dr'r'^2 < p'lm|r'lm >< r'lm|V|rlm >< rlm|plm > \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty drr^2 \int_0^\infty dr'r'^2 j_l(p'r') \frac{\delta(r-r')}{rr'} V(r') j_l(pr) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty drr^2 j_l(pr) V(r) j_l(p'r) \end{aligned} \tag{53}$$

但し、ここでは局所的なポテンシャル ( 15 ) の場合を示したが、非局所的な場合を練習問題として読者に任せる。このように求まった $V_l(p,p')$ を用いて、遷移振幅 $t_l$ を ( 49 ) 式より求める。

しかしながら、実際の核力はもう少し複雑である。なぜならば、核子が固有に持つスピンやアイソスピンにも依存するからである。それらの空間も含めた基底を与えれば、

$$\begin{aligned} |p(ls)jm(\frac{1}{2}\frac{1}{2})tm_t > &\equiv \sum_{m_t} C(lsj, m_l, m-m_l)|plm_l > |sm-m_l > \\ &\times \sum_{\nu} C(\frac{1}{2}\frac{1}{2}t, \nu, m_t-\nu)|\frac{1}{2}\nu > |\frac{1}{2}m_t-\nu > \end{aligned} \tag{54}$$

と表記できる。 2 核子のスピンの和 $s=0,1$ それにアイソスピンの和 $t=0,1$ を取ることができ、それぞれ、スピン一重項、三重項、アイソスピン一重項、三重項と呼ぶ。何重項

であるかは、例えばスピンの場合 $2s+1$ で計算する。核子同士がアイソスピンによって陽子か中性子かを識別する場合、それらを同一粒子と扱うと便利である。同一粒子の仮定は、対称性を持つことになり、核子はフェルミ統計に従う粒子であることから、粒子の交換に対して反対称性を持つ。この要請は良く知られているように次式で与えられる。

$$(-1)^{l+s+t} = -1 \tag{55}$$

核力の部分波のラベルを次のように書くのが通常である。$t$ = 1 に対して、

$$^{2s+1}l_j = {}^1S_0, {}^3P_0, {}^3P_1, {}^1D_2, {}^3P_2 - {}^3F_2, \ldots \tag{56}$$

また、$t$ = 0 に対しては、

$$^{2s+1}l_j = {}^1P_1, {}^3S_1 - {}^3D_1, {}^3D_2, \ldots \tag{57}$$

等々である。ここで、ハイフン(-)を入れた状態は結合した状態を意味し、軌道角運動量 $l$ が保存しない。その原因がテンソル力に依るものであること知られている。従って一般に核力は、全核スピン、スピンと偶奇性(パリティ)が保存して、次のように書ける。

$$< p'(l's')j'm't'm'_t|V|p(ls)jmtm_t >= \delta_{jj'}\delta_{mm'}\delta_{tt'}\delta_{m_tm'_t}\delta_{s'}V^{sjtm_t}_{l'l}(p',p) \tag{58}$$

ただし、(55)式の条件から、アイソスピン依存性は無視した。しかし、実際は $m_t$ に依存する。その依存性は次の2つのことから分類する。荷電独立性の破れ(Charge Independence Breaking : CIB)と荷電対称性の破れ(Charge Symmetry Breaking : CSB)である。すなわち、
CIB : 中性子-陽子に働く核力(np)と、陽子-陽子に働く核力(pp)との違い。
CSB : 中性子-中性子に働く核力(np)と、陽子-陽子に働く核力(pp)との違い。
例えば、$^1\mathrm{S}_0$の状態について、np の核力は nn 或は pp の核力と異ることを、散乱長で見れば、

$$a_{np} = -23.48 \pm 0.009fm[5] \tag{59}$$

$$a_{pp/strong} = -17.36 \pm 0.4fm[6] \tag{60}$$

$$a_{nn} = -18.6 \pm 0.3fm \tag{61}$$

ここで、中性子-中性子散乱は直接実験ができないために、$\pi^- + d \to n + n + \gamma$ の反応や、中性子-重陽子の崩壊実験と3体計算より引出している。$t$ = 1 の場合の CIB や CSB はまだ正確に確立できたとはいえない。中間子論的な観点からこの違いの起源は核力の内部のパイ中間子の質量の違いか生じると説明される。以下の議論ではこの $m_t$依存性については触れないので、引数からはずす。

リップマン-シュウィンガー方程式は、一般的な基底を用いて、

$$< p'(l's')jt|t(E)|p(ls)jt >=< p'(l's')jt|V|p(ls)jt >$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \sum_{l''} \int_0^\infty dp'' p''^2 < p'(l's')jt|V|p''(l''s)jt > \frac{1}{E - p''^2/m + i\epsilon} \\
&\times \quad < p''(l''s)jt|t(E)|p(ls)jt >
\end{aligned} \tag{62}
$$

或いは、

$$
t_{l'l}^{sj}(p', p) = V_{l'l}^{sj}(p', p) + \sum_{l''} \int_0^\infty V_{l'l''}^{sj}(p', p'') \frac{1}{E - p''^2/m + i\epsilon} t_{l''l}^{sj}(p'', p) \tag{63}
$$

と書ける。スピンは高々１であり、パリティは保存することから、軌道角運動量は

$$
l = l' \quad or \quad l = l' \pm 2 \tag{64}
$$

が取り得る。このことから、単一積分方程式または、連立積分方程式を扱うことになる。２つの部分波が結合した典型的な例は

$$
{}^3S_1 - {}^3D_1 \tag{65}
$$

の状態で、重陽子の状態である。

# 2　３核子束縛状態

３核子系の厳密な解を得るための安全な方法の一つとして、Faddeev の方法がある。

## ２．１ **Faddeev** 方程式

一つの３体系には３つの２体部分系がある。先ずは２体系に働く核力だけを問題にし、その後で３核子に働く３体力を取り込んでいこう。２体力を含んだハミルトニアンから始める。

$$
(H_0 + \sum_{i=1}^{3} V_i)\Psi = E\Psi \tag{66}
$$

ここで、便宜上表記の簡単化を行う。例えば、

$$
V_1 \equiv V_{23},\ V_2 \equiv V_{31},\ V_3 \equiv V_{12} \tag{67}
$$

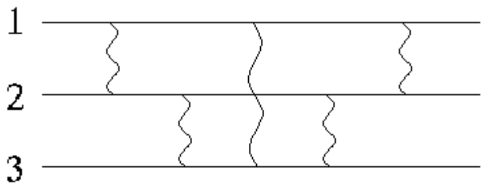
とする。$H_0$は３体の相対運動エネルギーで、( 66 ) 式を書き直せば、

$$
\Psi = \frac{1}{E - H_0} \sum_i V_i \Psi \tag{68}
$$

となり、束縛状態であることから、非斉次の項は現れない。どのような現象が起っているのかを見るために、この式をこの式自体に何度か代入を繰り返してみよう。

$$
\Psi = G_0 \sum V_i \Psi = G_0 \sum V_i G_0 \sum V_j G_0 \sum V_k \ldots \Psi \tag{69}
$$

これを、図にしてみれば、ある典型的な場合として、下図の様に描ける。




２体の場合に既に見てきたように、グリーン関数（ $G_0$ ）と相互作用の部分が交互に現れている。更に、良く観察すれば、同じペア（ ２核子 ）同士の相互作用の繰り返しの場合と、異なるペアの相互作用に移る場合になっていることに気付く。さて、同じペアの部分が更にもう一度同じペアで相互作用する場合も可能である。同じペアの部分は、１度、２度、３度、... と相互作用をしたものを全て取り込む必要がある。Faddeev 理論では、これを可能する。先ず、波動関数を３つの部分に分解する。

$$\Psi = \sum_{i}^{3} \psi_i \tag{70}$$

$$\psi_i \equiv G_0 \, V_i \, \Psi \tag{71}$$

今日ではそれぞれの部分を Faddeev 要素と呼ぶ。最後の相互作用 $V_i$ に着目して分類したことになる。これを、元の式に代入し直してみれば、

$$\psi_i = G_0 V_i \sum_{j} \psi_j = G_0 V_i \, \psi_i + G_0 V_i \sum_{i \neq j} \psi_j \tag{72}$$

となり、２つの項に分けられる。第２項から、次の繰り返しをすれば分るように、異るペアの相互作用が現れる。第１項を左辺へ移項しますと、

$$(1 - G_0 V_i)\psi_i = G_0 V_i \sum_{j \neq i} \psi_j \tag{73}$$

となり、この積分核 $(1 - G_0 V_i)$ の逆を作用させると、

$$\psi_i = (1 - G_0 V_i\,)^{-1} G_0 V_i \sum_{j \neq i} \psi_j \tag{74}$$

を得る。右辺の Faddeev 要素の前にある部分を整理してみよう。

$$\begin{aligned} (1 - G_0 V_i\,)^{-1} G_0 V_i &= (1 + G_0 V_i + G_0 V_i G_0 V_i + \ldots) G_0 V_i \\ &= G_0 (V_i + V_i G_0 V_i + V_i G_0 V_i G_0 V_i + \ \ldots) \\ &\equiv G_0 \, t_i \end{aligned} \tag{75}$$

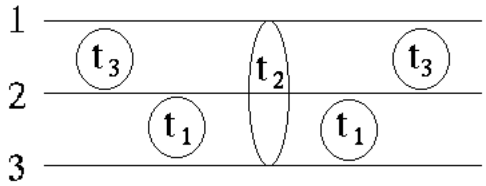
よって、この式は、i-番目のペアにおける遷移行列（ $t$ - matrix ）に帰着する。これは第一章で述べた LSE 方程式を満す。

$$t_i = V_i + V_i \, G_0 \, t_i \tag{76}$$

従って、( 74 ) 式は

$$\psi_i = G_0\, t_i \sum_{j \neq i} \psi_j \tag{77}$$

となる。これは、3 つの式が連立した方程式で、**Faddeev** 方程式と呼ぶ。[7] 相互作用 $V$ ではなく、この $t$ によって、( 77 ) 式を繰り返したグラフを書けば、下図の様になる。




ここで、重要なことは遷移行列 $t$-metrix が、次の $t$- matrix を繰り返す場合、必ず異なるペアを選ぶ事である。実は、この事が 3 体方程式が数学的に解けるかどうかに関する重要な意味をもっている。[7]

もう少し具体的に 3 つの同一フェルミオンを扱うことにしよう。この場合、全体の波動関数は、全反対称状態 ( 任意の 2 粒子の交換に対して、波動関数の位相を (-1) だけかえる ) である。同一粒子であることから、Faddeev 要素の関数はどれも同じになり、粒子の交換をすることによって表すことができる。それを表記すれば、粒子交換演算子 $P$ を用いて、

$$\psi_2 \equiv G_0 V_2 \Psi = P_{12} P_{23} G_0 V_1 \Psi \equiv P_{12} P_{23} \psi_1 \tag{78}$$

$$\psi_3 \equiv G_0 V_3 \Psi = P_{13} P_{23} G_0 V_1 \Psi \equiv P_{13} P_{23} \psi_1 \tag{79}$$

の様に定義できる。粒子交換演算子を使えば、Faddeev 3 元連立方程式は一本化できる。

$$\psi_1 = G_0\, t_1\, (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23}) \psi_1 \tag{80}$$

従って、粒子ペアを表していた引数は表記しなくてもよくなり、粒子交換演算子もまとめて

$$P \equiv P_{12} P_{23} + P_{13} P_{23} \tag{81}$$

と書けば、( 80 ) 式は、

$$\psi = G_0\, t\, P\, \psi \tag{82}$$

となる。 これが、3 粒子が同一粒子の場合の Faddeev 方程式である。また、3 ボソンの場合にも同じ式を与える。波動関数はこの $P$ を使って、

$$\Psi = (1 + P) \psi \tag{83}$$

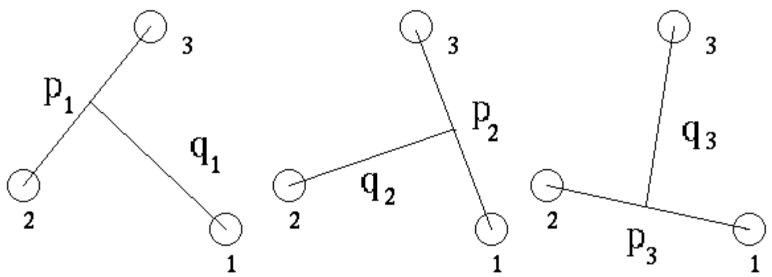
と表せる。波動関数が全反対称であることから、Faddeev 要素は少くてもペア １ ＝（ ２ ３ ）間に対して、反対称でなくてならない。このことを具体的に示す一つの例として、粒子１と３の交換について考えてみよう。

$$\begin{aligned} P_{13}\Psi &= P_{13}(1+P_{12}P_{23}+P_{13}P_{23})\psi(1,23) \\ &= \psi(3,21)+P_{13}\psi(2,31)+P_{13}\psi(3,12) \\ &= \psi(3,21)+\psi(2,13)+\psi(1,32) \\ &= -\psi(3,12)-\psi(2,31)-\psi(1,23) \\ &= -(1+P)\psi(1,23) = -\Psi \end{aligned} \tag{84}$$

確かに、ペア交換に対して、位相を変えている。

２．２ 運動量表示

議論を簡単化するために、スピンとアイソスピンの自由度を無視する。更に同一粒子の場合、質量も同じと仮定することによって、ヤコビ座標を次のように導入できる。




$$\overrightarrow{p_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{k_2}-\overrightarrow{k_3}) \tag{85}$$

$$\overrightarrow{q_1} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{k_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{k_2}+\overrightarrow{k_3})\right) \tag{86}$$

これは、ペアを１＝（ ２ ３ ）に選んだ場合で、２＝（ ３ １ ）、３＝（ １ ２ ）に対しても、同様に、

$$\overrightarrow{p_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{k_3}-\overrightarrow{k_1}) \tag{87}$$

$$\overrightarrow{q_2} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{k_2}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{k_3}+\overrightarrow{k_1})\right) \tag{88}$$

$$\overrightarrow{p_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{k_1}-\overrightarrow{k_2}) \tag{89}$$

$$\overrightarrow{q_3} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{k_3} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_2})\right) \tag{90}$$

ここで、後に大切になる関係を示しておく。

$$\overrightarrow{p_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{p_1} - \frac{3}{4}\overrightarrow{q_1} \tag{91}$$

$$\overrightarrow{q_2} = \overrightarrow{p_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{q_1} \tag{92}$$

$$\overrightarrow{p_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{p_1} + \frac{3}{4}\overrightarrow{q_1} \tag{93}$$

$$\overrightarrow{q_3} = -\overrightarrow{p_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{q_1} \tag{94}$$

$p_i$は（ $jk$ ）のペア間の相対運動量で、$q_i$ は（ $jk$ ）ペアの重心と第３粒子間の相対運動量である。

　次に、３体の状態ベクトルを導入する。

$$|\ \overrightarrow{p_i}\ \overrightarrow{q_i}\ > \equiv |\ \overrightarrow{p_i}\ >|\ \overrightarrow{q_i}\ > \tag{95}$$

これは第一章で扱ったものと同様に、規格化できる。

$$<\ \overrightarrow{p_i'}\overrightarrow{q_i'}\ |\ \overrightarrow{p_i}\ \overrightarrow{q_i}\ > = \delta^3(\overrightarrow{p_i}' - \overrightarrow{p_i})\,\delta^3(\overrightarrow{q_i}' - \overrightarrow{q_i}) \tag{96}$$

どのヤコビ座標系で表したかを明記することは、便利である。それを括弧の下に付けた。

$$|\ \overrightarrow{p_1}\ \overrightarrow{q_1}\ >_1 = |\ \overrightarrow{p_2}\ \overrightarrow{q_2}\ >_2 = |\ \overrightarrow{p_3}\ \overrightarrow{q_3}\ >_3 \tag{97}$$

この表記を使えば、例えば

$$P_{12}P_{23}\ \ |\ \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q}\ >_1 \tag{98}$$

は

$$P_{12}P_{23}\ \ |\ \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q}\ >_1 = |\ \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q}\ >_2 \tag{99}$$

と書ける。次に Faddeev 方程式を運動量表示で表現してみよう。

$$\psi = G_0\,t\,P\,\psi \tag{100}$$

即ち、

$$<\ \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q}\ |\ \psi\ > = <\ \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q}\ |\ G_0\,t\,P\ \ |\ \psi\ >$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^3p'' d^3q'' \int d^3p' d^3q' < \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q}\ \mid G_0\, t\ \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' > \\
& < \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' \mid P \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' >< \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' \mid \psi > \qquad (101)
\end{aligned}
$$

で与えられ、$G_0 = \frac{1}{E-H_0}$ の運動エネルギー $H_0$の部分は、それぞれのヤコビ座標を使えば、

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \frac{\overrightarrow{p_1}^2}{m} + \frac{3}{4m}\overrightarrow{q_1}^2 = \frac{\overrightarrow{p_2}^2}{m} + \frac{3}{4m}\overrightarrow{q_2}^2 \\
&= \frac{\overrightarrow{p_3}^2}{m} + \frac{3}{4m}\overrightarrow{q_3}^2 \qquad (102)
\end{aligned}
$$

と書ける。この $H_0$の固有状態は、( 95 ) 式の 3 体平面波である。ここで $G_0$は、基底に対して対角的であるから、

$$
< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid G_0\, t \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' >= \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} < \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid t \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' > \qquad (103)
$$

であり、$t$ 演算子はポテンシャル $V$ から求まり、 2 体系の $p$ の変数にのみ作用する。

$$
< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid V \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' >= \delta^3(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}') < \overrightarrow{p} \mid V \mid \overrightarrow{p}' > \qquad (104)
$$

$q$ は第 3 粒子の運動量である。$q$ の大きさに関係なく粒子( 1 2 )の相互作用は決るので、第 3 粒子を傍観粒子 ( spectator ) と呼ぶ。LSE 方程式をもう一度、 3 体の基底で見直してみれば、

$$
\begin{aligned}
& < \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid t(E) \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' >=< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid V \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' > + < \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid V G_0\, t(E) \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' > \\
= \ & \delta^3(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}') < \overrightarrow{p} \mid V \mid \overrightarrow{p}' > + \int d^3p'' d^3q'' < \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid V \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' > \\
\times \ & \frac{1}{E + i\epsilon - \frac{p''^2}{m} - \frac{3}{4m}q''^2} < \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' \mid t(E) \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' > \\
= \ & \delta^3(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}') < \overrightarrow{p} \mid V \mid \overrightarrow{p}' > + \int d^3p'' < \overrightarrow{p} \mid V \mid \overrightarrow{p}'' > \\
\times \ & \frac{1}{E + i\epsilon - \frac{p''^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} < \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q} \mid t(E) \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' > \qquad (105)
\end{aligned}
$$

となり、( 104 ) のポテンシャルと同じく、$q$ に対するデルタ関数を添えることで求められる。

$$
< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid t(E) \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' >= \delta^3(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}') < \overrightarrow{p} \mid \hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2) \mid \overrightarrow{p}' > \qquad (106)
$$

ここで、$\hat{t}$ は 2 核子系での $t$-matrix で、そのエネルギーは、 $E_2 = E - 3/4mq^2$ で置き換わる。エネルギーは $p$ 及び、$p'$に独立な変数であることに注意する。エネルギー殻上 ( on-energy-shell ) といわれるものは $p = p' = \sqrt{mE}$ の条件の意味のもので、 2 体系のオブザーバブルでは、この量だけが重要であった。 3 体系では、その条件以外の部分即ち、非エネルギー殻 ( off-energy-shell ) の $t$-matrix が必要になる。$\hat{t}$の LSE 方程式 は、

$$
< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid \hat{t}(z) \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' >=< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid V \mid \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q}' >
$$

$$\times \quad \int d^3p'' < \overrightarrow{p} \mid V \mid \overrightarrow{p}'' > \frac{1}{z - \frac{p^2}{m}} < \overrightarrow{p}'' \mid \hat{t}(z) \mid \overrightarrow{p}' > \tag{107}$$

である。$q$ が増加すると、２体系のエネルギーが減るわけだから、 $E < 0$ の束縛状態の問題を扱うときは、常にグリーン関数 $G_0$ には発散する特異点がない。従って、( $101$ ) の Faddeev 方程式は、

$$\begin{aligned}< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid \psi >= &\int d\overrightarrow{p}' \int d\overrightarrow{p}'' \int d\overrightarrow{q}'' \frac{1}{E - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} \\ \times \quad &< \overrightarrow{p} \mid \hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2) \mid \overrightarrow{p}' >< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid P \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' >< \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' \mid \psi >\end{aligned} \tag{108}$$

となる。ここで、技術的に最も面倒な扱いをしなくてはならない演算子は 粒子交換演算子で、これは、２つのデルタ関数に分解される。( $91$ ) 式から ( $94$ ) 式の関係を考慮すれば、直ちに

$$\begin{aligned}< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid P \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' > &\equiv {}_1< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid P \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' >_1 \\ &= {}_1< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' >_2 +_1 < \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' >_3 \\ &= {}_1< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid -\frac{1}{2}\overrightarrow{p}'' + \frac{3}{4}\overrightarrow{q}'',\ -\overrightarrow{p}'' - \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'' >_1 \\ &+ {}_1< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid -\frac{1}{2}\overrightarrow{p}'' - \frac{3}{4}\overrightarrow{q}'',\ \overrightarrow{p}'' + \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'' >_1 \\ &= \delta^3(\overrightarrow{p}' + \frac{1}{2}\overrightarrow{p}'' - \frac{3}{4}\overrightarrow{q}'')\,\delta^3(\overrightarrow{q} + \overrightarrow{p}'' + \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'') \\ &+ \delta^3(\overrightarrow{p}' + \frac{1}{2}\overrightarrow{p}'' + \frac{3}{4}\overrightarrow{q}'')\,\delta^3(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}'' + \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'')\end{aligned} \tag{109}$$

を得る。このデルタ関数は ( $108$ ) 式の３つの積分の中、２つを消去する。( $109$ ) 式をもう少し整理して、

$$\begin{aligned}< \overrightarrow{p}'\ \overrightarrow{q} \mid P \mid \overrightarrow{p}''\ \overrightarrow{q}'' > &= \delta^3(\overrightarrow{p}' - \frac{1}{2}\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}'')\,\delta^3(\overrightarrow{p}'' + \overrightarrow{q} + \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'') \\ &+ \delta^3(\overrightarrow{p}' + \frac{1}{2}\overrightarrow{q} + \overrightarrow{q}'')\,\delta^3(\overrightarrow{p}'' - \overrightarrow{q} - \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'')\end{aligned} \tag{110}$$

( $108$ ) 式は、

$$\begin{aligned}< \overrightarrow{p}\ \overrightarrow{q} \mid \psi > &= \frac{1}{E + i\epsilon - \frac{p^2}{m} - \frac{3}{4m}q^2} \int d\overrightarrow{q}'' \\ &(< \overrightarrow{p} \mid \hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2) \mid \overrightarrow{q} + \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'' >< -\overrightarrow{q} - \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'',\ \overrightarrow{q}'' \mid \psi > \\ &+ < \overrightarrow{p} \mid \hat{t}(E - \frac{3}{4m}q^2) \mid -\overrightarrow{q} - \frac{1}{2}\overrightarrow{q}'' >< \overrightarrow{q} + \frac{1}{2}\overrightarrow{q},''\ \overrightarrow{q}'' \mid \psi >)\end{aligned} \tag{111}$$

と与えられる。このままでは、$t$-matrix と Faddeev 要素 との間の積分は、$p$ と $q$ の６変数 ( ２×３次元 ) を扱わなくてはならなくなる。これは、計算機に直接代入できる程、自由度が減っていない。実際にそれを直接扱う研究もあるが、核力が主に S 波や又はテンソル力による D 波など比較的小さな部分波によって記述できることを期待すれば、部分波展開の方法は有効である。

## 2．3 Faddeev 方程式の部分波表現

２核子の場合に既に導入したように、２体系の部分波表現の基底は、

$$|\,p\,(ls)jm\,tm_t> \tag{112}$$

によって与えられ、第３の粒子を記述するために、次の基底を追加する。

$$|\,q\,(\lambda\frac{1}{2})IM_I\,\frac{1}{2}\nu> \tag{113}$$

ここで、Λは $q$ の軌道角運動量であり、 $J$ は３体系全体の全スピンである。 $j$ と $I$ の角運動量の合成により、全スピン $J$ を得る。アイソスピン空間も ２体系の $t$ と第３粒子のスピン $1/2$ による合成で、全アイソスピン $T$ を得る。

$$\begin{aligned}|\,pq\,(ls)j\,(\lambda\frac{1}{2})I\,JM\,(t\frac{1}{2})TM_T> &\equiv \sum_\mu C(jIJ,\,\mu\,M-\mu)\sum_\nu C(t\frac{1}{2}T,\,\nu\,M_T-\nu)\\ \times\quad |\,p(ls)j\mu\,t\nu>|\,q(\lambda\frac{1}{2})IM_I-\mu,\,\frac{1}{2}M_T-\nu> \end{aligned}\tag{114}$$

これらの表記を簡単に $|pq\alpha>$ と書き、これを状態チャンネル或は単に、チャンネルとよぶ。３体の基底の完全性を書き表せば、

$$\sum_\alpha\int_0^\infty dp\,p^2\int_0^\infty dq\,q^2\ \ |\,p\,q\,\alpha><p\,q\,\alpha\,|=1 \tag{115}$$

と与えられる。ここで、２体部分系に反対称状態の物理的な要請は、( 55 )であり、Faddeev 要素を書き表わせば、

$$|\,\psi>=\sum_\alpha\int_0^\infty dp\,p^2\int_0^\infty dq\,q^2\,|\,p\,q\,\alpha><p\,q\,\alpha\,|\,\psi> \tag{116}$$

となり、( 111 ) 式の Faddeev 方程式は部分波表現で与えることができる。

$$\begin{aligned}<p\,q\,\alpha\,|\,\psi>=<p\,q\,\alpha\,|\,G_0\,t\,P\,|\,\psi> &= \frac{1}{E-\frac{p^2}{m}-\frac{3}{4m}q^2}<p\,q\,\alpha\,|\,t\,P\,|\,\psi>\\ = \quad \frac{1}{E-\frac{p^2}{m}-\frac{3}{4m}q^2}&\sum_{\alpha'}\int_0^\infty dp'\,p'^2\int_0^\infty dq'\,q'^2<p\,q\,\alpha\,|\,t\,|\,p'\,q'\,\alpha'>\\ \times\quad <p'\,q'\,\alpha'\,|\,P\,|\,\psi>&\end{aligned}\tag{117}$$

( 106 ) 式での $t$-matrix も次のように表現できる。

$$<p\,q\,\alpha\,|\,t(E)\,|\,p'\,q'\,\alpha'>=\frac{\delta(q-q')}{qq'}\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{II'}\hat{t}^{sjt}_{ll'}(p,\,p',\,E-\frac{3}{4m}q^2) \tag{118}$$

$t$-marix が２体の軌道角運動量 $l$ について対角的でない場合、即ち、異なる $l$ に結合する場合を考慮して、次のように書けば正確である。

$$<p\,q\,\alpha\,|\,\psi>\ \ =\ \ \frac{1}{E-\frac{p^2}{m}-\frac{3}{4m}q^2}\sum_{l'}\int_0^\infty dp'\,p'^2\hat{t}^{sjt}_{ll'}(p,\,p',\,E-\frac{3}{4m}q^2)<p'\,q\,\overline{\alpha}\,|\,P\,|\,\psi>$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{E-\frac{p^2}{m}-\frac{3}{4m}q^2}\sum_{l'}\int_0^\infty dp'\,p'^2\hat{t}^{sjt}_{ll'}(p,\,p',\,E-\frac{3}{4m}q^2)\\
&\times \sum_{\alpha''}\int_0^\infty dp''\,p''^2\int_0^\infty dq''\,q''^2 < p'\,q\,\overline{\alpha}\mid P\mid p''\,q''\,\alpha''>< p''\,q''\,\alpha''\mid\psi> \quad (119)
\end{aligned}
$$

粒子交換演算子 $P$ が 3 体問題を難しくする原因であるが、結局の所、次のようにまとまる。

$$
< p\,q\,\alpha\mid P\mid p'\,q'\,\alpha'>=\int_{-1}^1 dx\,G_{\alpha\alpha'}(q,\,q',\,x)\frac{\delta(p-\pi_1)}{\pi_1^{l+2}}\frac{\delta(p'-\pi_2)}{\pi_2^{l'+2}} \qquad (120)
$$

ここで、$\pi_1\pi_2$ は

$$
\pi_1=\sqrt{\frac{1}{4}q^2+q'^2+qq'x} \qquad (121)
$$

$$
\pi_2=\sqrt{\frac{1}{4}q'^2+q^2+qq'x} \qquad (122)
$$

で与えられる。$G_{\alpha\alpha'}$ は純粋に幾何的な量である。[2, 8] これを使って ( 119 ) 式は、

$$
\begin{aligned}
< p\,q\,\alpha\mid\psi> &= \frac{1}{E-\frac{p^2}{m}-\frac{3}{4m}q^2}\sum_{l'}\sum_{\alpha''}\int_0^\infty dq''\,q''^2\\
&\times \int_{-1}^1 dx\frac{\hat{t}^{sjt}_{ll'}(p,\,\pi_1,\,E-\frac{3}{4m}q^2)}{\pi_1^{l'}}G_{\overline{\alpha}\alpha''}(q,\,q'',x)\frac{<\ pi_2\,q''\,\alpha''\mid\psi>}{\pi_2^{l''}} \quad (123)
\end{aligned}
$$

となる。この段階で、Faddeev 方程式は $p$ と $q$ の 2 つの連続変数に対する連立積分方程式といえる。 2 体の部分波を制限すれば、チャンネルは典型的な選択として 5 つの場合をしめす。

| $\alpha$ | $l$ | $s$ | $j$ | $\lambda$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 2 | $\frac{3}{2}$ |
| 5 | 2 | 1 | 1 | 2 | $\frac{3}{2}$ |

この場合、 2 体の部分波は$^3S_1$ と$^1S_0$ の 2 つの状態だけしか取り込んでいないが、 3 重水素 ( トリトン ) の結合エネルギーのほとんどを説明する。

　ここで、具体的に Faddeev 方程式を解くための技術的な点にふれる。( 121 ) 式と ( 122 ) 式から明かに、$x$ の角度積分をするためには、任意の $p=\pi_1, p'=\pi_2$ が必要になる。従って、計算機にそれをさせるためには関数の内挿法が必要になる。即ち、一般に関数 $f(x)$ を

$$
f(x)\cong\sum_k S_k(x)f(x_k) \qquad (124)
$$

の様に近似する。この場合、 $f(x_k)$ はデータとして常に計算機の記憶装置に蓄えておき、必要に応じて 内挿関数 $S_k(x)$ により、任意の $x$ に対する 値 $f(x)$ を求めるものである。この、最初のデータとする $x$ の点のセット{ $x$ }は、例えば、t-matrix の積分方程式を解くときに決める。通常、その積分点は、ガウス積分法によって求められる。このようにして、計算機に載せる場合、$p$ と $q$ の 2 の変数に対して、積分点のセット{ $p_n, q_m$ }を準備する。このことから、( 123 ) 式を計算機で計算するための具体的な表現を示せば、

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha(p_k,\, q_l) &= \frac{1}{E - \frac{p_k^2}{m} - \frac{3}{4m}q_l^2} \\
&\times \sum_{l'} \sum_{\alpha''} \sum_{n} \varpi_n\, q_n^2 \int_{-1}^{1} dx \sum_i \hat{t}^{sjt}_{ll'}(p_k,\, p_i,\, E - \frac{3}{4m}q_l^2) \\
&\times \frac{S_i(\pi_1)}{\pi_1^{l'}} G_{\overline{\alpha}\alpha''}(q_l,\, q_m,\, x) \sum_m S_m(\pi_2)\psi_{\alpha''}(p_m,\, q_n) \\
&\equiv \sum_{mn} \sum_{\alpha''} K_{\alpha\alpha''}(kl,\, mn)\psi_{\alpha''}(p_m,\, q_n)
\end{aligned} \tag{125}
$$

を得る。ここで、計算の規模について説明する。大きさはその次元によって特徴づけることができ、この場合、

$$N = N_q \cdot N_p \cdot N_\alpha \tag{126}$$

で与えられる。典型的な数として、$N_p$ $N_q$ それぞれに対して、３４点、２０点である。チャンネル数はポテンシャルの数に依って制限を受けるが、その指標として $j$ の最大値を選べば、

$$j_{max} = 1, 2, 3, \qquad etc. \tag{127}$$

のそれぞれに対して $N_\alpha$ は次の様に増加する。

| $j_{max}$ | $N_\alpha$ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 18 |
| 3 | 26 |
| 4 | 34 |
| 5 | 42 |

収束したより現実的な計算をするためには少くても $j_{max} = 4$ が必要で、その条件の下では $N \approx 25000$ の次元となる。この様に大きな次元の行列の対角化にはランチョスの方法 [9] が最も早くそして経済的な方法として採用されている。

## ２．４ 理論的な計算によるトリトンの様々な性質

色々な現実的なポテンシャルを用いて、トリトンの結合エネルギーが計算されている。以下に示した表では、$j_{max}$ をどこまで取り込んだかによって、それぞれのポテンシャルに対する結合エネルギーを示した。( 表の単位は MeV )

| $Potential$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Paris$[10] | 7.30 | 7.38 | 7.44 | 7.46 | 7.46 |
| $Nijm78$[11] | 7.49 | 7.54 | 7.62 | 7.63 | – |
| $NijmII(np)$[12] | 7.65 | 7.75 | – | 7.89 | – |
| $AV14$[13] | 7.45 | 7.58 | 7.67 | 7.68 | – |
| $Bonn$ [14] | 8.17 | 8.10 | 8.13 | 8.14 | 8.14 |
| $Ruhrpot$[15] | 7.59 | 7.56 | 7.62 | 7.64 | – |

実験値８．４８ MeV に比較する精度としては、$j_{max} = 4$ で十分であることが分る。この表で示したポテンシャルは、第一章で述べた CIB（荷電独立性の破れ）を考慮した計算もあり、それは中性子-陽子ポテンシャルと中性子-中性子ポテンシャルを区別する。それらを考慮した計算の有効的な扱いとして、特に$^1$S$_0$状態に対して、

$$t_{eff} = \frac{2}{3} t_{nn}^{t=1} + \frac{1}{3} t_{np}^{t=1} \tag{128}$$

の混合を行えば、十分精度の良い計算ができることが知られている。[16] T ＝３／２の混合は CSB（荷電対称性の破れ）から生じるが、非常に小さな寄与であることが示されている。（128）式を使った CIB の計算を表にする。（表の単位は MeV）

| $Potential$[10] | $E_b(j_{max} = 4)$ |
|---|---|
| $Nijm93\,(cd)$[12] | 7.66 |
| $Nijm\,I\,(cd)$[12] | 7.73 |
| $Nijm\,II\,(cd)$[12] | 7.64 |
| $AV18\,(cd)$[17] | 7.65 |
| $Bonn\,(cd)$[18] | 8.00 |

この中で局所的なポテンシャルは Nijm II[12], Nijm 93[12], AV18[17] で、ほとんど同じ結合エネルギーを与えている。Nijm I[12] ポテンシャルはそれらに対して弱い非局所性があり、そのために １００ keV の違いがある。更に、完全に非局所的ポテンシャルである CD- Bonn[18] は、約３５０ keV の差がある。なぜ非局所的ポテンシャルが３体系では引力的に働くかの明確な原因は、まだ説明されていない。実験値と比較すれば、５００から８００ keV の違いがある。結合エネルギーの大きさと比較すれば、この違いが大きいように見える。しかし、結合エネルギーは正の運動エネルギー（４５ MeV-５５ MeV）と負のポテンシャルエネルギーの相殺から得られることを考えると、その食い違いはポテンシャルエネルギーに対して、１％程度のものと言うこともできる。このことについて、３体力のところでもう一度ふれることにしよう。

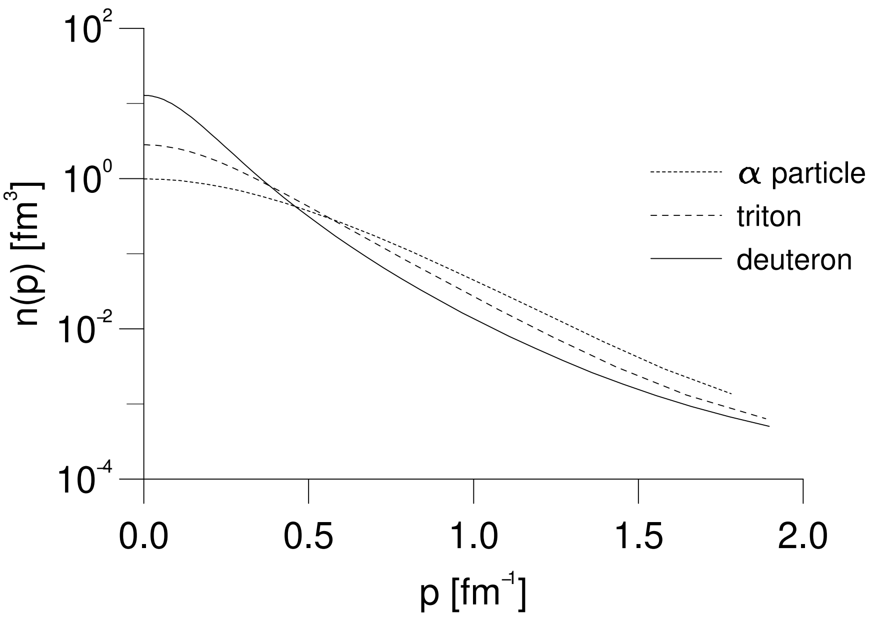
さて、運動量分布関数 $n(k)$ と相関関数 $C(r)$ を重陽子の場合と比較しよう。（ただし、図にはα粒子の場合もプロットしてある。[60]）この場合、重陽子と比べるとトリトンはより高い密度がわかる。一般に $n(p)$ は、

$$n(p) \equiv \bar{\sum_m} \int d\Omega_{\vec{p}} < \Psi_b m | \bar{\sum_i} \delta(\vec{p} - \vec{k}_i) | \Psi_b m > \tag{129}$$

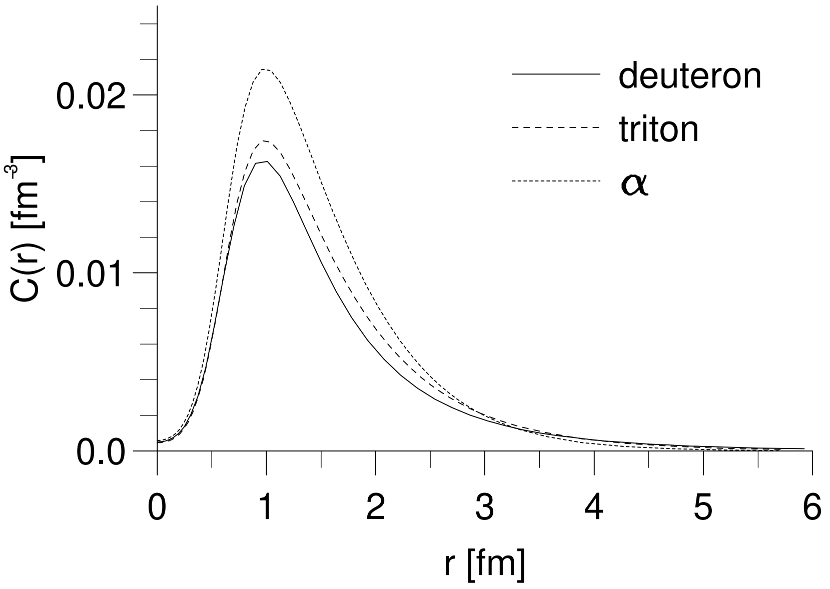
と定義でき、$\bar{\sum}$ は平均をとる意味である。$C(r)$ は、

$$C(r) = \bar{\sum_m} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{r}} < \Psi_b m | \bar{\sum_{i<j}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{ij}) | \Psi_b m > \tag{130}$$

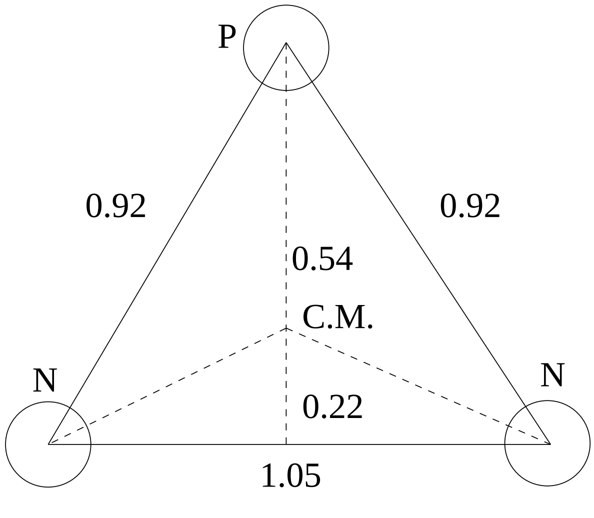
と定義する。ここで、$\vec{r}_{ij}$ は、i-粒子と j-粒子の相対ベクトルを意味する。




1 fm 辺りでトリトンの場合が大きな相関密度をもっているのは、トリトンの方が重陽子よりも多くの結合エネルギー(　7．4 8 MeV ＞　2．2 3 MeV )をもっていて、そのために相関関数はトリトンの方が早く 0 に近付くためである。また、原点では相関が少くなる理由は、核力の近距離での強い斥力によるものである。このことは、第 3 番目の核子に関係なく同じ振舞いをする。アルゴンヌ AV １８ポテンシャルを用いた。[17]




一つの簡単な設問として、「もっとも可能性の高い３核子の位置はどこだろうか？」というものがある。それは、以下のグラフに示した通りで、その形は殆ど正三角形に近く、同一粒子である中性子同士の距離が他の２つの距離よりも少し長くなっている。それらの距離は１ fm 程度で、原子分子の場合と違って少し変形しても同程度の存在確率をもっている。( 図の単位は [fm] ）

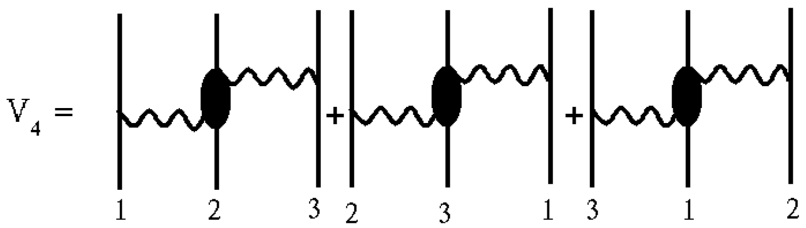



２．５　３体力の効果

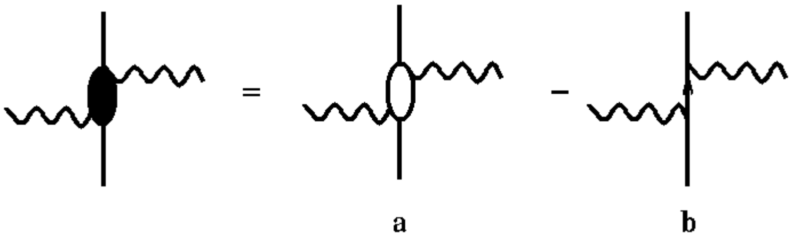
３体力についての論文は豊富にあり、そのいくつかを参考文献に載せた。[19] 最近のカイラル摂動理論によるもの等がある。[20] ここでは、それぞれの３体力についての議論は

行ない。勿論、これらは２体力をどのように導入したかとの関連によって、様々な３体力が与えられる。しかしながら、ここでは、その中の一つの例を示すことにし、それをいかに Faddeev 方程式に組込むかについて議論する。

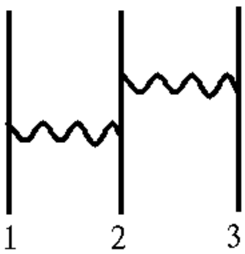
３体力のひとつのあり方として考えらるメカニズムは、２π中間子交換である。



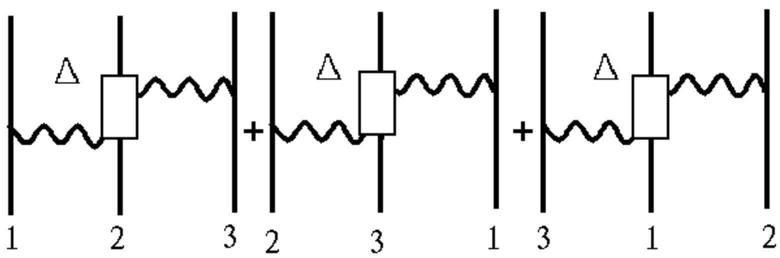

図に示した黒丸の部分は、核子内部の励起を考えている。実線は核子、波線はπ中間子が伝播している様子を表す。内部励起のしていない核子の線を取り除くと、πＮの弾性散乱の図が得られる。しかし、これはπ-N 散乱の散乱振幅 (a) から、単純に核子が伝播する部分 (b) を差し引いたものと解釈できる。




なぜならば、この伝播する項 (b) を取り込んだ３核子の過程を考えれば、図のように、




既に２体力で考慮したものに成ってしまい、同じものを二重に取り込むことになるからである。( $V_{12}G_0V_{23}$ ) 従って、( b ) の項はπ-N の振幅から取り除いたものを $V_4$としなくてはならない。



この場合、内部励起の状態は物理的にもっとも考えられる仮定で、具体的にはそれはΔ粒子である。あからさまに、Δ粒子を用いて３体力が提案されたものを Fujita-Miyazawa 力（藤田-宮沢）[21] と呼ばれている。低エネルギーでのカレント代数を考慮すると、Fujita-Miyazawa 力 の他に幾つか付加された項も含めた３体力の模型があり、代表的なものは、Tuscon-Melbouron 力 （TM）と呼ばれている。[22] π-π交換について、その表式を書けば、

$$V_4^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{g_{\pi NN}^2}{4m^2}\frac{F_{\pi NN}^2(Q^2)}{\overrightarrow{Q}^2+m_\pi^2}\frac{F_{\pi NN}^2(Q'^2)}{\overrightarrow{Q'}^2+m_\pi^2}(\overrightarrow{\sigma_2}\cdot\overrightarrow{Q})(\overrightarrow{\sigma_3}\cdot\overrightarrow{Q'})$$
$$\times\ \left\{\overrightarrow{\tau_2}\cdot\overrightarrow{\tau_3}\left[a+b\overrightarrow{Q}\cdot\overrightarrow{Q'}+c(\overrightarrow{Q}^2+\overrightarrow{Q'}^2)\right]+d\overrightarrow{\tau_3}\times\overrightarrow{\tau_2}\cdot\overrightarrow{\tau_1}\,\overrightarrow{\sigma_1}\cdot(\overrightarrow{Q}\times\overrightarrow{Q'})\right\} \quad (131)$$

の様に与えられる。上につけた添字（１）は、図で示した３つの過程のなかで、真中の核子番号が１番になる項（第３項）を意味し、他の項は循環あるいは反循環の粒子交換演算子によって求まる。

$$V_4 = V_4^{(1)} + P_{12}P_{23}V_4^{(1)}P_{13}P_{23} + P_{13}P_{23}V_4^{(1)}P_{12}P_{23} \quad (132)$$

ここで、$F_{\pi NN}(Q)$ は強い相互作用の形状因子、また、$Q$ や $Q'$はπの運動量を意味する。$a, b, c, d$ の定数は理論的に与えられたり、実験的に決められなくてはならない自由度がまだ残されている。

この３体力は簡単に座標表示に書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
V_4^{(1)} &= \left(\frac{g_{\pi NN}m_\pi}{2m}\right)^2\frac{1}{(4\pi)^2}[\overrightarrow{\tau_2}\cdot\overrightarrow{\tau_3}((\overrightarrow{\sigma_2}\cdot\overrightarrow{\nabla}_2)(\overrightarrow{\sigma_3}\cdot\overrightarrow{\nabla}_3) \\
&\quad \{(a-2m_\pi^2c)Z_1(x_{12})Z_1(x_{13})+c[Z_0(x_{12})Z_1(x_{13})+Z_1(x_{12})Z_0(x_{13})] \\
&+ b\overrightarrow{\nabla}_2\cdot\overrightarrow{\nabla}_3 Z_1(x_{12})Z_1(x_{13})\}) \\
&+ \overrightarrow{\tau_2}\times\overrightarrow{\tau_3}\cdot\overrightarrow{\tau_1}\overrightarrow{\sigma_2}\cdot\overrightarrow{\nabla}_2\overrightarrow{\sigma_3}\cdot\overrightarrow{\nabla}_3\overrightarrow{\sigma_1}\cdot\overrightarrow{\nabla}_2\times\overrightarrow{\nabla}_3 Z_1(x_{12})Z_1(x_{13})d\,]
\end{aligned} \quad (133)$$

ここで、関数 $Z$ は次式で与えられる。

$$Z_n(x_{ij}) = \frac{4\pi}{m_\pi}\int\frac{d\overrightarrow{Q}}{(2\pi)^3}e^{i(\overrightarrow{x_i}-\overrightarrow{x_j})\cdot\overrightarrow{Q}}\frac{F_{\pi NN}^2(\overrightarrow{Q}^2)}{(\overrightarrow{Q}^2+m_\pi^2)^n} \quad (134)$$

例えば、スピンやアイソスピンを無視して、更に a 項だけに注目すれば、これは、明かに２つの Yukawa 型の相互作用の積に成っている。しかしながら、見ての通り３体力はもう少し複雑である。更に、π-πのみでなく、π-$\rho$ や $\rho-\rho$ の交換の効果を取り込んだ３体力もある。その場合、$\rho$ のスピンが１であるために複雑な形のスピン依存型の３体力になる。

次に、これらの３体力を Faddeev 方程式に取り込むことを考えましょう。先ず、シュレディンガー 方程式から始める。

$$(H_0+\sum V_i+\sum V_4^{(i)})\,\Psi = E\,\Psi \quad (135)$$

ここで、既に３体力は３つの部分から成ることを仮定している。しかし、この仮定は物理的には３核子の同一性からなんら矛盾することではない。従って、２体力 $V_{ij}$ の和と３体力の和はまとめることができて、Faddeev 要素は次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \Psi &= G_0 \sum_i (V_i + V_4^{(i)})\, \Psi \\ &\equiv \sum_i \psi_i \end{aligned} \tag{136}$$

$$\psi_i = G_0(V_i + V_4^{(i)})\, \Psi = G_0(V_i + V_4^{(i)}) \sum_i \psi_i \tag{137}$$

$$(1 - G_0 V_i)\, \psi_i = G_0 V_i \sum_{j \neq i} \psi_j + G_0 V_4^{(i)} \sum_j \psi_j \tag{138}$$

$$\psi_i = (1 - G_0 V_i)^{-1} G_0 V_i \sum_{j \neq i} \psi_j + (1 - G_0 V_i)^{-1} G_0 V_4^{(i)} \sum_j \psi_j \tag{139}$$

ここで、LSE の２体散乱行列 $t$ は次式を満すことから、

$$(1 - G_0 V_i)^{-1} = 1 + G_0\, t_i \tag{140}$$

Faddeev 方程式は

$$\psi_i = G_0\, t_i \sum_{j \neq i} \psi_j + (1 + G_0\, t_i) G_0 V_4^{(i)} \sum_j \psi_j \tag{141}$$

の様に書ける。更に、粒子交換演算子を使って書けば、見通しの良い形として、

$$\psi = G_0\, t\, P \psi + (1 + G_0\, t) G_0 V_4^{(1)} (1 + P)\, \psi \tag{142}$$

を得る。実際の計算では、これらを更に部分波に分解した形で解く必要がある。それについての詳細は、Glöckle のレクチャーノート [23] にある。３体力に用いている粒子交換演算子は（109）式に伴う表現を使う方が便利である。その部分波の扱い方は Hüber 等の論文 [24] に詳しい。

TM の３体力を Faddeev 方程式に取り込んだ最初の研究は、笹川等 [25] によって行われた。

残念ながら、現状ではπNN の形状因子に対する強い依存性があり、通常それは

$$F_{\pi NN}(\overrightarrow{Q}^2) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 + \overrightarrow{Q}^2} \tag{143}$$

の形で与えられ、切断パラメーターΛに依って結合エネルギーが簡単に変ってしまう。π-$\rho$ 及び$\rho - \rho$ の交換を考慮した計算が Stadler 等によって初めて行われた。[26] 様々な２体の現実的ポテンシャルを用いての最近の計算は、Nogga 等 [27] によって示された。表には、その適切な切断パラメーターを選んでの結果を示した。２体力で知られている切断パラメーターと比べて３体力は大きな値が必要であるが、表を見て分るように、３体力によって実験値の再現に希望が持てそうである。しかしながら、Λのバラつき具合から、２体力と３体力の整合性について更に研究する余地があることが理解できる。

| Potential | $\Lambda[m_\pi]$ | $E_b[MeV]$ |
|---|---|---|
| $CD-Bonn$[18] | 4.856 | 8.483 |
| $NijmII$[12] | 4.990 | 8.477 |
| $Reid93$[12] | 5.096 | 8.480 |
| $NijmI$[12] | 5.147 | 8.480 |
| $AV18$[17] | 5.215 | 8.479 |
| $Ruhrpot$[15] | 5.306 | 8.459 |

その方向での理論的な進め方のひとつは、トリトン内部のΔ粒子の励起を１つだけに留まらせず、２つ３つと増すことである。

$$\mid \Psi >=\mid NNN > \Psi_{NNN}+\mid NN\Delta > \Psi_{NN\Delta}+\mid N\Delta\Delta > \Psi_{N\Delta\Delta}+\mid \Delta\Delta\Delta > \Psi_{\Delta\Delta\Delta} \quad (144)$$

当然、これらの基底をシュレディンガー方程式に代入すれば、４つの連立した方程式を解くことになる。最近のこの方向での研究は Picklsime 等 [28] にあり、先駆的な仕事は、Hajduk 等 [29] よってなされた。そこでは、Δ粒子による引力的な部分は他の効果から生じる斥力的な部分と打ち消し合い、結局は２体力に近付き、また、ΔΔΔ の状態は非常に小さいが、N ΔΔは無視できないというものであった。

２体力と３体力の整合性の叶った計算は、まだなされていない。

# 3　３核子散乱

３体散乱の正確な境界条件は、どんなものだろうか。

## ３．１ **LSE** の **Triad** 方程式

２つの核子（２、３）が重陽子の束縛状態にあるところへ、核子１が衝突する場合を考える。従って、始状態は重陽子の波動関数と第３粒子の運動量によって表せる。

$$\Phi_1 \equiv\mid \varphi_d(23) >\mid \overrightarrow{q} >_1 \quad (145)$$

ここで、$\varphi_d$は重陽子の波動関数、$q$ は重陽子と粒子との相対運動量で、直ちに次式を満す。

$$\begin{aligned}(H_0+V_1)\mid \Phi_1 > &= (\frac{\hat{p}^2}{m}+\frac{3\hat{q}^2}{4m}+V_1)\mid \varphi_d >\mid \overrightarrow{q} > \\ &= (E_d+\frac{3}{4m}q^2)\mid \Phi_1 >\equiv E\mid \Phi_1 > \end{aligned} \quad (146)$$

これは漸近的な終状態（核子＋重陽子）であるが、その他異ったペアによる重陽子と核子になるチャンネルと３核子が全てバラバラに壊れる Breakup の過程がある。それらのチャンネルに対してどのような境界条件を与えるか、が問題になる。重陽子と核子１の始状態からの散乱状態を$\Psi_1^{(+)}$とすれば、それはシュレディンガー方程式を満す。

$$(H_0+V_1+V_2+V_3)\,\Psi_1^{(+)}=E\,\Psi_1^{(+)} \quad (147)$$

少し書きなおして、

$$(H_0+V_1-E)\Psi_1^{(+)}=-(V_2+V_3)\,\Psi_1^{(+)} \tag{148}$$

を得る。$\Psi_1^{(+)}$は、始状態を非斉次項として、

$$\Psi_1^{(+)}=\Phi_1+\frac{1}{E+i\epsilon-H_0-V_1}(V_2+V_3)\,\Psi_1^{(+)} \tag{149}$$

と求まる。非斉次項は $(V_2+V_3)$ のない場合の解である。第 2 項のグリーン関数の部分を書きかえてみよう。

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv \frac{1}{E+i\epsilon-H_0-V_1} \\ &= \int d\overrightarrow{q}\mid\overrightarrow{q}>\frac{1}{E+i\epsilon-\frac{3}{4m}q^2-\frac{\widehat{p}^2}{m}-V_1}<\overrightarrow{q}\mid \\ &= \int d\overrightarrow{q}\mid\overrightarrow{q}>\mid\varphi_d>\frac{1}{E+i\epsilon-\frac{3}{4m}q^2-E_d}<\varphi_d\mid<\overrightarrow{q}\mid \\ &+ \int d\overrightarrow{q}\mid\overrightarrow{q}>\mid\overrightarrow{p}>^{(+)}\frac{1}{E+i\epsilon-\frac{3}{4m}q^2-\frac{p^2}{m}}{}^{(+)}<\overrightarrow{p}\mid<\overrightarrow{q}\mid \end{aligned} \tag{150}$$

第 1 項は重陽子の状態からで、$y$ を座標表示での $q$ に対応するヤコビ座標とし、これをあらわすと、

$$\begin{aligned} &\int d\overrightarrow{q}<\overrightarrow{y}\mid\overrightarrow{q}>\mid\varphi_d>\frac{1}{E+i\epsilon-\frac{3}{4m}q^2-E_d}<\varphi_d\mid<\overrightarrow{q}\mid\overrightarrow{y}'> \\ =\ & \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\overrightarrow{q}e^{i\overrightarrow{q}\cdot(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{y}')}\mid\varphi_d>\frac{1}{E-E_d+i\epsilon-\frac{3}{4m}q^2}<\varphi_d\mid \\ =\ & -\mid\varphi_d>\frac{2m}{3}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\sqrt{\frac{4m}{3}(E-E_d)}|\overrightarrow{y}-\overrightarrow{y}'|}}{\mid\overrightarrow{y}-\overrightarrow{y}'\mid}<\varphi_d\mid \end{aligned} \tag{151}$$

と書け、これは ( 13 ) 式に対応した計算過程である。このように、$E>E_d$ の領域では、散乱チャンネル 1 の振舞いは、次のようになる。

$$-2m\sqrt{2\pi}\frac{e^{i\sqrt{\frac{4m}{3}(E-E_d)}y}}{y}<\varphi_d\mid<\overrightarrow{q}'\mid V_2+V_3\mid\Psi_1^{(+)}> \tag{152}$$

ここで、$q'$ は$\hat{y}q_0$ であり、$3q_0^2/4m=E-E_d$ である。始状態の運動量を特に $q_0$とする。同時に、始状態 1 のチャンネルから終状態のチャンネル 1 への遷移振幅を定義することができる。

$$U_{11}\equiv<\Phi_1\mid V_2+V_3\mid\Psi_1^{(+)}> \tag{153}$$

ここで$\Phi_1$は、ブラベクトルでのもの。

それでは、他のチャンネルへの場合はどうであろうか？それは、( 150 ) 式の第 2 項から説明されなくてはならないだろう。しかし、シュレディンガー方程式 ( 147 ) に戻り、違った式変形を考えれば、直ちに、

$$(H_0+V_2-E)\Psi_1^{(+)}=-(V_3+V_1)\Psi_1^{(+)} \tag{154}$$

を得るが、( 149 ) と違って今度は、

$$\Psi_1^{(+)} = \frac{1}{E + i\epsilon - H_0 - V_2}(V_3 + V_1)\Psi_1^{(+)} \tag{155}$$

のように、非斉次の項は許されない。いずれにせよ、散乱振幅は

$$U_{21} \equiv < \Phi_2 \mid V_3 + V_1 \mid \Psi_1^{(+)} > \tag{156}$$

によって定義できる。勿論、

$$< \Phi_2 \mid \equiv < \varphi_d(31) \mid \ {}_2 < \vec{q}\,' \mid \tag{157}$$

である。３番目のチャンネルに対しても同様で、LSE 斉次方程式を得る。

$$\Psi_1^{(+)} = \frac{1}{E + i\epsilon - H_0 - V_3}(V_1 + V_2)\Psi_1^{(+)} \tag{158}$$

従って、この場合も振幅は、

$$U_{31} \equiv < \Phi_3 \mid V_1 + V_2 \mid \Psi_1^{(+)} > \tag{159}$$

で求まる。もう少し考えてみれば明かなように散乱状態は、( 149 ) 式だけでなく、２、３でラベルできる波動関数によっても記述できるはずで、そのことは、$\Psi_1^{(1)}$ がユニークな解でない事を表している。すなわち、終状態が、２の粒子と重陽子の漸近状態に対する$\Phi_2$或は３の粒子と重陽子になる場合$\Phi_3$を考えれば、それぞれの解は次式を満し、

$$\Psi_2^{(+)} = G_1(V_2 + V_3)\Psi_2^{(+)} \tag{160}$$

$$\Psi_3^{(+)} = G_1(V_2 + V_3)\Psi_3^{(+)} \tag{161}$$

LSE 方程式の一般解は

$$\Psi^{(+)} = \Psi_1^{(+)} + \alpha\Psi_2^{(+)} + \beta\Psi_3^{(+)} \tag{162}$$

のように、$\alpha$ と$\beta$を適当に選んでも、満足してしまうことになる。このことは、３体 LSE は一意的な解を与えないことを意味して、Glöckle は、

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{(+)} &= \Phi_1 + G_1(V_2 + V_3)\Psi_1^{(+)} \\
\Psi_1^{(+)} &= G_2(V_3 + V_1)\Psi_1^{(+)} \\
\Psi_1^{(+)} &= G_3(V_1 + V_2)\Psi_1^{(+)}
\end{aligned} \tag{163}$$

の３つの方程式を連立させて解けば、必要かつ十分な解を得ることを示した。[30] これを **LSE の Triad** という。この Triad を用いると、次章の Alt-Grassberger-Sandhas (AGS) 方程式及び Faddeev 方程式を簡単に導出できる。[31]

## ３．２ AGS 方程式

散乱を扱う場合、波動関数よりもむしろ散乱振幅を扱う方が多く、その方が断面積を計算するのに直接的である。散乱振幅 $U_{ij}$ に対する方程式を導出しよう。これは、Triad の方程式から、直接求まる。( 153 ) 式から、

$$U_{11}\Phi_1 \equiv (V_2 + V_3)\Psi_1^{(+)} \tag{164}$$

と定義できて、( 163 ) 式と ( 163 ) 式を使えば、右辺は

$$U_{11}\Phi_1 = V_2 G_2 (V_3 + V_1)\Psi_1^{(+)} + V_3 G_3 (V_1 + V_2)\Psi_1^{(+)} \tag{165}$$

となる。定義 ( 156 ) 式と ( 159 ) 式を用いれば、

$$U_{21}\Phi_1 \equiv (V_3 + V_1)\Psi_1^{(+)} \tag{166}$$

$$U_{31}\Phi_1 \equiv (V_1 + V_2)\Psi_1^{(+)} \tag{167}$$

$$U_{11}\Phi_1 = V_2 G_2 U_{21}\Phi_1 + V_3 G_3 U_{31}\Phi_1 \tag{168}$$

を得る。また、( 166 ) 式と ( 167 ) 式から始めれば、( 163 ) 式を用いて、

$$U_{21}\Phi_1 = V_3 G_3 U_{31}\Phi_1 + V_1\Phi_1 + V_1 G_1 U_{11}\Phi_1 \tag{169}$$

$$U_{31}\Phi_1 = V_2 G_2 U_{21}\Phi_1 + V_1\Phi_1 + V_1 G_1 U_{11}\Phi_1 \tag{170}$$

も求めることができる。これらは結合した方程式で、もっと簡単に書き表せれば、

$$U_{i1} = \bar{\delta}_{i1} G_0^{-1} + \sum_{j \neq i} V_j G_j U_{j1} \tag{171}$$

となる。ここで、$G_0^{-1}\Phi_1 = (E - H_0)\Psi_1 = V_1\Phi_1$、また、$\bar{\delta}_{i1} = 1 - \delta_{i1}$ の表記を用いた。( 171 ) 式を **AGS(Alt-Grassberger-Sandhas)** 方程式と呼ぶ。[31] 実際には、３核子は同一粒子として扱うので、反対称化した状態を用いる。

$$\Psi_a^{(+)} = \Psi_1^{(+)} + \Psi_2^{(+)} + \Psi_3^{(+)} \tag{172}$$

従って、$\Psi_1^{(+)}$ は粒子２と３に対して反対称であり、$\Psi_2^{(+)}$ は、１と３に対し、$\Psi_3^{(+)}$は１と２に対して反対称状態が仮定される。更に、粒子交換演算子 $P$ を使えば、明かに

$$\Psi_2^{(+)} = P_{12} P_{23} \Psi_1^{(+)} \tag{173}$$

$$\Psi_3^{(+)} = P_{13} P_{23} \Psi_1^{(+)} \tag{174}$$

の関係を得る。従って反対称化された物理的状態$\Psi_a^{(+)}$ は $P$ を用いて、

$$\Psi_a^{(+)} = (1+P)\Psi_1^{(+)} \tag{175}$$

と書き表せる。この事は、( 84 ) 式で示したことと同じである。例として、終状態がチャンネル 1 になる散乱振幅 $U_1$を考えよう。定義から、

$$U_1\Phi_1 \equiv (V_2+V_3)\Psi_a^{(+)} = \sum_{j=1}^{3} U_{1j}\,\Phi_j \tag{176}$$

となり、チャンネル 2 と 3 に対する振幅 ( $U_2, U_3$ ) も同様に求まる。

$$U_i\,\Phi_1 = \sum_j U_{ij}\,\Phi_j \tag{177}$$

ここで、AGS 方程式 ( 171 ) をそれぞれのチャンネルに対して、あからさまに書き直せば、

$$U_{ij}\,\Phi_j = \bar{\delta}_{ij}\,G_0^{-1}\Phi_j + \sum_{k\neq i} V_k G_k U_{kj}\,\Phi_j \tag{178}$$

となるから、$U_i$との関係 ( 177 ) を使えば、

$$\begin{aligned} U_i\,\Phi_1 &= \sum_j U_{ij}\,\Phi_j = \sum_j \bar{\delta}_{ij} G_0^{-1}\Phi_j + \sum_j \sum_{k\neq i} V_k G_k U_{kj}\,\Phi_j \\ &= \sum_j \bar{\delta}_{ij} G_0^{-1}\Phi_j + \sum_{k\neq i} t_k G_0 U_k\,\Phi_1 \end{aligned} \tag{179}$$

となる。ここで、もう一度粒子交換演算子 $P$ を使えば、

$$U_2\Phi_1 = P_{12}P_{23}U_1\Phi_1 \tag{180}$$

$$U_3\Phi_1 = P_{13}P_{23}U_1\Phi_1 \tag{181}$$

とできるので、あえて $U_i$に添字 ( $i$ ) を付ける必要がなくなる。 ( $U \equiv U_1$ ) これにより、( 179 ) は簡単に表記できる。

$$U = PG_0^{-1} + P\,t\,G_0 U \tag{182}$$

$U$ は弾性散乱振幅として次のように書き表せる。

$$< \Phi' \mid U \mid \Phi > \equiv < \varphi_d \,|< \vec{q}\,' \mid U \mid \varphi_d >| \,\vec{q_0} > \tag{183}$$

次に、3 つの粒子がバラバラに分解する場合 (Breakup) を考えよう。漸近的な状態 $|\Psi_0 >$ は、自由なチャンネルだから、

$$\mid \Phi_0 > \equiv \mid \vec{p} > \mid \vec{q} > \tag{184}$$

であり、これは

$$H_0 \mid \Phi_0 >= (\frac{\widehat{p}^2}{m} + \frac{3\widehat{q}^2}{4m}) \mid \overrightarrow{p} \overrightarrow{q} > \quad = \quad (\frac{\widehat{p}^2}{m} + \frac{3\widehat{q}^2}{4m}) \mid \Phi_0 >\equiv E \mid \Phi_0 > \tag{185}$$

に従う。また、Breakup の散乱振幅 $U_0$は

$$< \Phi_0 \mid V_1 + V_2 + V_3 \mid \Psi_1^{(+)} > \tag{186}$$

で定義できるから、演算子 $U_0$は

$$U_0 \equiv (V_1 + V_2 + V_3) \mid \Psi_1^{(+)} > \tag{187}$$

と書けて、( 163 ) 式から ( 163 ) 式の Triad を用いて、

$$\begin{aligned}
U_0 &= (V_1 + V_2 + V_3)(\Psi_1^{(+)} + \Psi_2^{(+)} + \Psi_3^{(+)}) \\
&= V_1\Phi_1 + V_1G_1U_{11} + V_2G_2U_{21} + V_3G_3U_{31} \\
&+ V_1G_1U_{12} + V_2\Phi_2 + V_2G_2U_{22} + V_3G_3U_{32} \\
&+ V_3G_3U_{31} + V_3G_3U_{32} + V_3\Phi_3 + V_3G_3U_{33} \\
&= \sum_i V_i\,\Phi_i + V_1G_1\sum_{j=1}^{3} U_{1j} + V_2G_2\sum_{j=1}^{3} U_{2j} + V_3G_3\sum_{j=1}^{3} U_{3j} \\
&= G_0^{-1}\sum_j \Phi_j + \sum_i V_iG_iU_i \\
&= G_0^{-1}(1+P)\Phi_1 + (1+P)t_1G_0U_1 \\
&= G_0^{-1}(1+P)\,\Phi + (1+P)\,t\,G_0\,U
\end{aligned} \tag{188}$$

最後の式で、添字を省いた。ここで、$U_0$は 3 粒子が分解するので、( 188 ) の第 1 項のエネルギー殻上に乗らない。従って、それからの寄与はなく、

$$U_0 \equiv (1+P)\,tG_0\,U \tag{189}$$

となる。

$U$ を解く代りに、次の量を定義すれば、

$$T \equiv t\,G_0\,U \tag{190}$$

( 182 ) 式の Faddeev 方程式は、

$$T = t\,P + t\,P\,G_0T \tag{191}$$

と書き換えられ、$U$ と $U_0$は $T$ を用いて、

$$U = PG_0^{-1} + P\,T \tag{192}$$

$$U_0 = (1+P)\,T \tag{193}$$

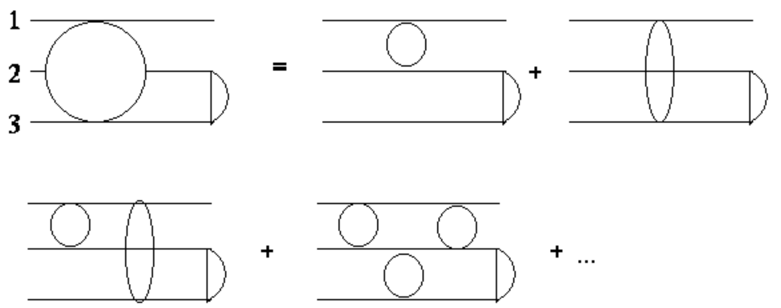
で求まる。ここで、$T$ は闇雲に導入したわけではなく、３体の遷移マトリックスとしての役割りを演じることになる。演算子 $T$ は定義から、$\Phi_1$のチャンネルに働くので、あからさまに書けば、

$$T \mid \Phi >= t\,P \mid \Phi > +t\,P\,G_0 T \mid \Phi > \tag{194}$$

これを繰り返して代入すれば、

$$T \mid \Phi >= t\,P \mid \Phi > +t\,P\,G_0\,t\,P \mid \Phi > +t\,P\,G_0\,t\,P\,G_0\,t\,P \mid \Phi > + \ldots \tag{195}$$

これは、グラフで表せば、

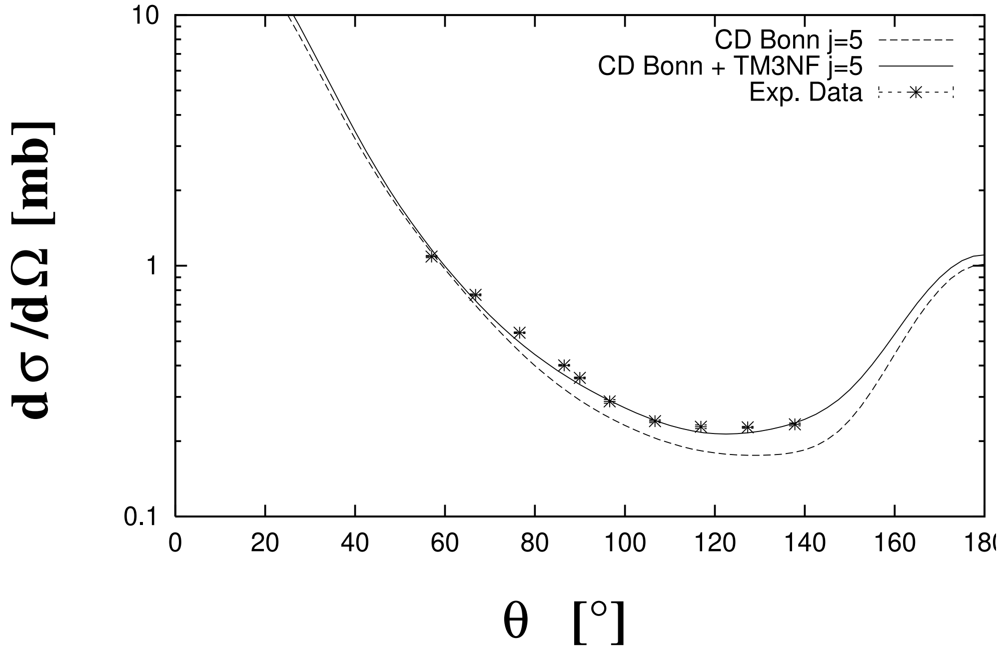



のように、より見通しの良い物理的なメカニズムを説明する。ここで、積分核（$tPG_0$）において、演算子 $P$ により、必ず異なるペアで $t$ マトリックス結合することが、方程式を数学的に解けるようにしている。

## ３．３ 重陽子-陽子 弾性散乱

３核子系における測定量は偏極量も含めれば非常に豊富である。参考文献として Glöckle のレポート [3] を紹介する。（偏極量の定義について詳しく知りたい読者は、教科書は色々でているが、Olsen の論文を読むことを勧める。[32]）ここでは最近のトピックスとして、高いエネルギー領域での重陽子-陽子弾性散乱について述べる。２．５の章で見てきた３体力の起源として核子内部の励起、即ちΔアイソバーの自由度を取り込むことを３核子散乱で計算を行った。このアプローチには、３体力を Faddeev 方程式に直接代入する方法 [33] と、Δアイソバーを準粒子として扱う方法 [34] とがある。

３体力の効果がよく現れていると思われる最近の実験との比較について述べる。近年、精力的に３核子散乱を理化学研究所（理研）[36] や KVI (Groningen), ICUF (Indiana University Cyclotron Facility)[35] で行われている。以下の図は、理研での偏極重陽子入射ビームによる（$E_d = 270MeV$）微分断面積 [36] を TM ３体力を入れた場合（実線）と入れなかった場合（破線）の比較である（角度は重心系）。２体ポテンシャルは CD-Bonn を用いている。[18]




重心系の角度で１２０ 付近に極小値がある。この部分の食い違い(３体力を含まない計算との)は、$E_d = 130MeV$ 当りから既に生じていることが指摘されてきた。[37, 38] これは、Sagara discrepancy と呼ばれている。[34] ３体力を含めることによって [39]、良く実験を再現することが理解できた。偏極量に対しても、精度の高い測定の解析が現在進行中である。[40]

# 4 今後の課題

２核子系での多くの研究によって得られた情報は、２核子間のポテンシャルという形で理解されてきた。歴史的には、現象論的なレベルや演算子による分類 [13]、中間子理論的なアプローチ [10, 12, 18, 15] そしてカイラル摂動理論 [41] といった形で発展してきた。しかし、古くからいわれてきているように２体系での研究は、核力の Energy shell 上に限られていて、３核子系以上の研究によらないと Off-Shell 性の理解ができない。その意味で、３核子系の研究は応用としての色あい以上のものがある。

また、３体系において初めて現れてくる３体力は、核子間の相互作用を担っている中間子のありかたが、２核子相互作用以上のものを引出す可能性として発揮する場合や、核子内部の励起によって引き起こる。核子の内部励起によるΔアイソバーから生じる３体力は、高エネルギー状態で見えてくることが期待された。[38, 34, 39] しかし、高エネルギーになると、相対論的な効果が現れることも期待され、これに対する定量的な理論計算 [42, 43] はまだされていない。相対論的な扱いによってトリトンの３体計算 [44] はされてきているが、まだ現実的なポテンシャルは用いられていない。

その他、低エネルギー領域($E_p \approx 10MeV$) における残された問題として代表的なも

のに、$A_y$ パズルと言われているものがある。[45, 46, 47, 48, 49]

３核子系の波動関数を用いて様々な応用ができる。$^3$He 原子核を標的する電子散乱は、電磁相互作用の部分が QED によって、正確に記述できることから、電子は良いプローブになっている。[50] オランダの NIKEHF[51] やドイツの Mainz、アメリカの MIT[52]、ジェファーソン研究所での実験が盛んに行われている。 pd capture （ $p+d \to {}^3He+\gamma$ ）も同じ計算で研究ができる。九州大学 [53] や RCNP、スイスのバーゼル [54] で実験が行われている。ここでは、ポテンシャルと同様、２核子相関を核子カレントで調べることが重要で、中間子交換流 [55, 56] を正確に扱う必要がでてくる。束縛系での研究が Carlson 等によってまとめられている。[57]

π中間子を３核子系に吸収させる反応 [58] も扱われたが、この場合はπ中間子と核子との強い相互作用があるために、電子散乱と大きく違いまたπ中間子が消滅する為に全体の系が高いエネルギー状態になり、従来の現実的ポテンシャルの適用外になる。しかしながら、粒子の生成消滅を扱う場の量子論との接点を見るうえで興味深い。

４核子への拡張も近年、目覚しいものがある。束縛系では、Faddeev 方程式（ 100 ）の代りに Yakubovsky 方程式 [59] を解くことになる。[60]

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -G_0TPP_{34}\psi_1+G_0TP\psi_2 \\ \psi_2 &= G_0\tilde{T}\tilde{P}(1-P_{34})\psi_1\end{aligned} \tag{196}$$

ここで、$\psi_1\psi_2, T, \tilde{T}$はそれぞれ、Yakubovsky 要素（ ３ ＋ １分割、 ２ ＋ ２分割 ）、３体の $t$ 行列及び２ ＋ ２分割の $t$ 行列を表している。現実的ポテンシャルを用いた厳密解が得られている。[60, 61] 束縛系は境界条件が明確であるため、Yakubovsky 方程式に依らなくとも計算はできる。この系においても、２ MeV から４ MeV 程度の結合エネルギーが不足している。３体力を含めた計算が期待されている。変分法による研究もされている。[62, 63, 64, 65] 特に、Stochastic variational method[66] や Green function Monte Carlo method[67]、coupled-rearrengement-channel Gaussian-basis method [68] は、強力な方法で、６体や７体での計算も高精度で求まる。４体散乱の研究は、Fonseca 等 [69] を初め多く人によって進められている。[57, 70, 71]

核子をハイペロンに置き換えることで、軽いハイパー核の計算ができる。陽子、中性子及びΛ粒子からなるハイパートリトンが計算された。[72] Λ粒子は弱い相互作用によって核子とπ中間子に崩壊することが知られている。Λ粒子から成るハイパートリトンも弱崩壊を起すが、π中間子を放出しない崩壊（ nonmesonic ）[73] もあり、その場合バーチャルに核内部を遷移する中間子がπ中間子だけとは限らないことから、その素過程は強い相互作用と弱い相互作用の混合したものとして興味がもたれている。[74, 75] π中間子を放出する崩壊 [76] は、nonmesonic より崩壊比が大きい。しかし、一般に、原子核が核子数を増すにつれて、nonmesonic な過程の方が崩壊比を大きくする。その理由は、Λ粒子は核子に対してパウリブロッキングが働かないが、弱崩壊後はそれが働き、そのためにエネルギーを必要とするからである。${}^4_\Lambda$He や${}^4_\Lambda$H のハイパー核までがブロッキングが働かず、この系には２つの興味ある束縛状態が存在することが知られている。[77]

技術的な方法論に大きな発展があるので、それについて述べる。特にこの分野において、近年の理論計算は、大型又はスーパーコンピューターに依らず行うことは不可能な状

況にある。その理由は解析解による結果がほとんどなく、数値計算に依らざろうえないからである。計算プログラムが複雑化すれば、正しい計算（プログラムにバグのない）結果を出しているかを、簡単に評価できない状態に陥る（物理理論自体の妥当性は別）。この困難を避けるためには、多くの研究者の有効な意見交換が不可欠である。この講義ノートでは、専らルール大学（ボフム）と Jagellonian 大学での共同研究に基く計算方法について紹介してきたが、Faddeev ３体理論計算の歴史には、いくつか上述した意味での大切なベンチマークテスト [78] の段階があり、お互いの精度をチェックしあうことで、各々のエラーのないプログラム作りに貢献してきた。

アプローチを大別すれば、座標表示又は運動量表示、両方を混合して計算する方法 [25] や、ポテンシャルを分離型展開をする方法等がある。分離展開法には、EST[79]、HSE、GSE[80]、USE[81] 等があり、それによって積分核の解析性が向上し、その性質を利用した複素経路積分（contour deformation）による計算方法が開発されてきた。[82] ２変数（$p, q$）で求める場合、Padé 法が用いられている。束縛系で用いられているランチョスの方法 [9] は、散乱系においても拡張可能で、安定した結果を与える。[83]

３体散乱計算の複雑さを与えるほとんどの理由は、２体の t-マトリクスと３体の自由グリーン関数の作る発散点の扱いにあると言うことができる。この問題は４体系以上に対しても引き起こる厳粛な問題であったが、解決されている。[84] ３体ブレークアップの計算に、クーロン力を正確に取り込むことは、未解決な問題である。

謝辞

今年還暦を迎えたドイツのルール大学教授 W. Glöckle 博士に御誕生祝いと感謝の言葉を添えたい。博士とポーランドの Jagellonian 大学の H. Witała 博士は、私が１９８９年よりドイツに渡ってから物理のことばかりではなく、多くの事で私を励まして下さいまして、大変ありがとうございました。(I would like to celebrate Prof. Walter Glöckle from Ruhr University Bochum on the occasion of his 60th birthday.）

第１回アジア-パシフィク少数多体問題の国際会議が母学（東京理科大学）において８月の下旬に行われ多くの参加者があり、成功したことは、恩師である尾立晋祥先生並びに九州大学の上村正康先生、法政大学の小池康郎博士、石川壮一博士のお蔭だと感じております。この場を借りて感謝の意を著します。

夏の学校での講義において、色々と手伝いをしてくださった原子核若手三者の準備校（東北大学）の木下忠君をはじめ、諸氏に感謝します。原稿を通読して、いきとどいた助言をしてくれた東京理科大の根本糸乃博士に御礼を申し上げます。この講義ノートは、Web 上にもリンクされています。[85]

# 参考文献

[1] 「散乱の量子論」砂川重信著、岩波全書２９６、(1980).

[2] W. Glöckle, “The Quantum-Mechanical Few-Body Problem” (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983).

[3] W. Glöckle, H. Witała, D. Hüber, H. Kamada, and J. Golak, Phys. Rep. **274** (1996) 107; http://www.tp2.ruhr-uni-bochum.de/agr-gloeckle/preprints/report.zip

[4] B. A. Lippmann, J. Schwinger, Phys. Rev. **79** (1950) 469.

[5] G. A. Miller *et al.*, Phys. Rep. **194** (1990) 1.

[6] B. Gabioud et al, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1508; O. Schori rt al, Phys. Rev. **C35** (1987) 2252.

[7] L. D. Faddeev, Sov. Phys. JETP **12** (1961) 1014.

[8] A. W. Thomas, “Modern Three-Hadron Physics” Topics Current Physics, (Springer Verlag, Berlin, 1977).

[9] A. Stadler, W. Glöckle, P. U. Sauer, Phys. Rev. **C44** (1991) 2319.

[10] M. Lacombe *et al.*, Phys. Rev. **C21** (1980) 861.

[11] M. M. Nagels *et al.*, Phys. Rev. **D17** (1978) 768.

[12] V. G. J. Stoks *et al.*, Phys. Rev. **C49** (1994) 2950.

[13] R. B. Wiringa, R.A. Smith, and T.L. Ainsworth, Phys. Rev. **D17** (1978) 768.

[14] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. **19** , (1989) 189.

[15] D. Plümper *et al.*, Phys. Rev. **C49** (1994) 2370.

[16] H. Witała *et al.*, Phys. Rev. **C43** (1991) 1619.

[17] R. B. Wiringa *et al* , Phys. Rev. **C51** (1995) 38.

[18] R. Machleidt, *et al.*, Phys. Rev. **C 53** (1996) R1483.

[19] M. R. Robilotta, Few-Body Systems Suppl. **2** (1987) 35; B. H. J. McKeller, Lecture Notes in Physics **260** (1986) 7; S. A. Coon, Few-Body Systems, Suppl. **1** (1986) 92; P. U. Sauer et al, Europhysics News **15** (1984) 5; R. B. Wiringa, Phys. Rev. **C43** (1991) 1585.

[20] U. van Kolck, Phys. Rev. **C49** (1994) 2932.

[21] J. Fujita *et al.*, Prog. Theor. Phys. **17** (1957) 360.

[22] S. A. Coon *et al.*, Nucl. Phys. **A317** (1979) 242; S. A. Coon and W. Glöckle, Phys. Rev. **C23** (1981) 1790.

[23] W. Glöckle, Lecture Notes in Physcs **273** (1987) 3; S. Coon et al, Phys. Rev. **C23** (1981) 1790.

[24] D. Hüber *et al.*, Few-Body System **16** (1994) 165.

[25] T. Sasakawa and S. Ishikawa, Few-Body Syst. **3** (1986) 3; 「少数多体系の物理学」笹川辰弥 著、物理学最前線１０、大槻義彦編、共立出版

[26] A. Stadler *et al.*, Phys. Rev. **C51** (1995) 2896.

[27] A. Nogga *et al.*, Phys. Lett. B **409** (1997) 19.

[28] A. Picklsimer *et al.*, Phys. Rev. **C46** (1992) 1178.

[29] Ch. Hajduk *et al.*, Nucl. Phys. **A405** (1983) 581; Nucl. Phys. **A405** (1983) 605.

[30] W. Glöckle, Nucl. Phys. **A141** (1970) 620.

[31] E. O. Alt *et al.*, Nucl. Phys. **B2** (1967) 167.

[32] G. G. Olsen, Rep. Prog. Phys. **35** (1972) 717; G. G. Olsen *et al.*, Nucl. Instr. Meth. **179** (1981) 283.

[33] D. Hüber *al.*, Acta Phys. Pol. **B 28** (1997) 1677; H. Witała *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1183.

[34] S. Nemoto, K. Chmielewski, S. Oryu, P. U. Sauer, Phys. Rev. **C 58** (1998) 2599.

[35] H. Rohdjeß*et al.*, Phys. Rev. **C 57** (1998) 2111; E. J. Stephenson *et al.*, Phys. Rev. **C 60** (1999) 061001.

[36] N. Sakamoto *et al.*, Phys. Lett. **B 367** (1996) 60.

[37] H. Shimizu *et al.*, Nucl. Phys. **A 382** (1982) 242.

[38] Y. Koike and S. Ishikawa, Nucl. Phys. **A631** (1998) 683c.

[39] H. Witała *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 1183; H. Kamada *et al.*, in prepearing.

[40] H. Sakai, K. Sekiguchi, private communications; K. Sekiguchi *et al.*, to appear in Suppl. of Few-Body Syst.

[41] E. Epelbaoum *et al.* , Phys. Lett. **B439** (1998) 1.

[42] F. Gross, Phys. Rev. **C 26** (1982) 2226.

[43] W. Glöckle *et al*, Phys. Rev. **C 33** (1986) 709; H. Kamada and W. Glöckle, Phys. Rev. Lett. **81**(1998) 2547 ; nucl-th/9910037.

[44] A. Stadler *et al.*, Phys. Rev. **C 55** (1997) 2396.

[45] Y. Koike, J. Haidenbauer, Nucl. Phys. **A 463** (1987) 365c.

[46] H. Witała *et al.*, Phys. Rev. **C 49** (1994) R14.

[47] W. Tornow, H. Witała, A. Kievsky, Phys. Rev. **C 57** (1998) 555.

[48] D. Hüber, J. L. Friar, Phys. Rev. **C 58** (1998) 674.

[49] A. Kievsky, *et al.*, Phys. Rev. **C 58** (1998) 3085.

[50] J. Golak *et al.*, Phys. Rev. **C52** (1995) 1216.

[51] D. L. Groep, *et al.*, to appear in Phys. Rev. Lett.

[52] H. Gao, Nucl. Phys. **A631** (1998) 170c.

[53] K. Sagara, in preparation; K. Sagara *et al.*, Proceedings of Few-Body Problems in Physics, ed. Franz Gross,(AIP Conference proceedings 334, 1995) page 467.

[54] H. Anklin *et al.*, Nucl. Phys. **A 636** (1998) 189.

[55] R. Schiavilla *et al.*, Phys. Rev. **C 40** (1989) 2294.

[56] V. V. Kotlyar *et al.*, in preparing; nucl-th/9903079.

[57] J. Carlson, R. Schialla, Rev. of Mod. Phys. **70** (1998) 743.

[58] H. Kamada *et al.*, Phys. Rev. **C55** (1997) 2563.

[59] O. A. Yakubovsky, Sov. J. Nucl. Phys. **5** (1967) 937.

[60] H. Kamada, W. Glöckle, Nucl. Phys. **A 548** (1992) 205; W. Glöckle and H. Kamada, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 971.

[61] N. W. Schellingerhout, Suppl. of Few-Body Syst. **7** (1994) 361.

[62] H. Kameyama *et al.*, Phys. Rev. **C 40** (1989) 974.

[63] Y. Akaishi, in *Models and Method in Few-Body Physics,* edited by L. S. Ferreira *et al.*, Lecture Notes in Physics Vol. 273 (Springer, Berlin, 1986), p 324.

[64] M. Viviani, A. Kievsky, S. Rosati, Few-Body Syst. **18** (1995) 25.

[65] J. Carlson, R. Schiavilla, Few-Body Syst. **7** (1994) 349.

[66] K. Varga, Y. Suzuki, Proceedings of the XVII RCNP international symposium on "Innovative Computational methods in nuclear many-Body Problems", ed. H. Horiuch *et al.* (World Scientific, 1998) page 68; K. Varga, Y. Suzuki, R. G. Lovas, Nucl. Phys. **A 571** (1994) 447.

[67] J. Carlson, Proceedings of the XVII RCNP international symposium on "Innovative Computational methods in nuclear many-Body Problems", ed. H. Horiuch *et al.* (World Scientific, 1998) page 59; J. Carlson, V. R. Pandharipande, and R. B. Wiringa, Nucl. Phys. **A 401** (1983) 59.

[68] M. Kamimura, Phys. Rev. **A38** (1988) 621; M. Kamimura, E. Hiyama, Y. Kino, Proceedings of the XVII RCNP international symposium on "Innovative Computational methods in nuclear many-Body Problems", ed. H. Horiuch *et al.* (World Scientific, 1998) page 47.

[69] A. C. Fonseca, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2036.

[70] E. Uzu, H. Kameyama, S. Oryu, and M. Tanifuji, Few-Body Systems **22** (1997) 65.

[71] F. Ciesielski and J. Carbonell, Phys. Rev. **C 55** (1998) 58.

[72] K. Miyagawa, H. Kamada, W. Glöckle, and V. Stoks, Phys. Rev. **C 51** (1995) 2905.

[73] J. Golak *et al.*, Phys. Rev. **C 55** (1997) 2196; **C56** (1997) 2892.

[74] A. Parreño, A. Ramos, and E. Oset, Phys. Rev. **C 51** (1995) 2477.

[75] J. Golak, H. Kamada, K. Miyagawa, H. Witała, and W. Glöckle, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3142.

[76] H. Kamada, J. Golak, K. Miyagawa, H. Witała and W. Glöckle, Phys. Rev. **C 57** (1998) 1595.

[77] E. Hiyama *et al.*, Nucl. Phys. **A639** (1998) 169c.

[78] J. L. Friar *et al.*, Phys. Rev. **C 51** (1995) 2356; Phys. Rev. **C 42** (1990) 1838.

[79] D. J. Ernst *et al.*, Phs. Rev. **C 8** (1973) 46.

[80] S. Oryu *et al.*, Suppl. Prog. Theor. Phys. **61** (1977) 199.

[81] Y. Koike, Proceedings of the XVII RCNP international symposium on "Innovative Computational methods in nuclear many-Body Problems", ed. H. Horiuch *et al.* (World Scientific, 1998) page 29; Phys. Rev. **C42** (1990) R2286.

[82] W. Ebenhöh, Nucl. Phys. **A191** (1972) 97; R.T. Cahill *et al.* , Nucl. Phys. **A165** (1971) 161.

[83] H. Kamada and W. Glöckle, Proceedings of Few-Body Problems in Physics, ed. Franz Gross, (AIP Conference proceedings 334, 1995) page 848.

[84] D. Hüber, H. Kamada, H. Witała and W. Glöckle, Few-Body Syst. **16** (1994) 165.

[85] http://www.rs.noda.sut.ac.jp/~oryu/SUMMER/TEXT0.html ;
http://www.rs.noda.sut.ac.jp/~oryu/SUMMER/summer.ps