特殊相対論の要点―相対論的力学を中心として―

2010．10.20 現在

1．特殊相対性理論の出発点としての二つの原理

光速度一定の原理：ふたつの慣性座標系においては(真空中の)光速は等しい。

特殊相対性原理：ふたつの慣性座標系においては、物理法則は同形である。

２．ローレンツ変換

ある粒子(物体)の空間座標と時間は二つの慣性座標系で一般には異なる。簡単のために、x(x‘)軸向きに相対速度ｖで運動する二つの慣性座標系を考えると、二つの慣性座標系における粒子の座標と時間 $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$ は次のローレンツ変換により相互に結びつけられている。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

この場合，二つの座標系における光速は等しくなる！

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c$$

３．質量とエネルギーの等価・転換性

(静止)質量ｍ、速度ｖの粒子の相対論的エネルギー：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (2)$$

静止エネルギー：mc^2 (3)

粒子の速度がゼロでも、粒子は静止エネルギーをもつ。

相対論的エネルギーは(近似的には)質量エネルギーと(ニュートン力学における)運動エネルギーの和に等しい：

$$\begin{aligned} E_{rel} &= mc^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots \right] \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \qquad (4)$$

(相対論的)運動エネルギーK とその近似

$$K \equiv E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 \qquad (5)$$

相対論的質量：

$$\frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (6)$$

質量は粒子の速度に依存して変化し、光速に近づくと無限大になる。

相対論的運動量

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad (7)$$

相対論的な運動量とエネルギーの関係

$$E^2=(mc^2)^2+(cp)^2 \qquad (8)$$

（解析力学における正準形式の場合と同様に）エネルギーと運動量から速度 v は

$$v=\frac{dE}{dp}$$

と与えられる。

4. 相対論的エネルギーの保存則

外部と質量、相互作用などやりとりがない系(孤立系)においては、粒子または粒子系の相対論的なエネルギーは保存される。(系を構成する粒子間にポテンシャル・エネルギーがある場合には相対論的エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和が保存される。)

ここで注意すべきは、(静止)質量は必ずしも保存されないということである。

同様に、相対論的な運動量も保存される。

実例：質量mの電子が静止していて、電位差 V の電極間で加速してとき、この電子が運動量 p をもつとすると

$$mc^2+eV=\sqrt{(mc^2)^2+(cp)^2}$$

という関係が成立する。この非相対論的な近似式は次のように与えられえる.

$$eV=\frac{1}{2}mv^2$$

5．相対論から見た光子の性質

光は(静止)質量は持たないが、そのエネルギーEと運動量pの間には

$$E=cp \qquad (9)$$

の関係がある。逆に、光がエネルギーE を持つ場合には

$$p=\frac{E}{c}$$

と与えられる運動量をもつことを意味する。

６．複合粒子における結合エネルギーと質量欠損

6.1 一般論

相対論的エネルギー、静止エネルギーについての上述の議論では、粒子に対して述べているが、それが要素的(素粒子)であることは条件にしていない。すなわち、以上の議論における粒子は複合粒子であってもよい。このとき、質量ｍは総質量に、速度ｖは複合粒子全体としての速度とみなせばよい。　すると相対論的なエネルギー保存則は次のように表現される。

（静止している複合粒子全体の静止エネルギー）

＝（構成粒子の静止エネルギーの和）＋(構成粒子の運動エネルギー)

+(構成粒子間の相互作用のポテンシャル・エネルギー)

数式で表現すれば

$$
\begin{aligned}
Mc^2 &= \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_i}{c}\right)^2}} + \sum_{ij} u_{ij} \\
&\approx \sum_i m_i c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{ij} u_{ij}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

そうだとすれば、構成粒子の質量 m_i の和は保存されず、

$$M \neq \sum_i m_i \tag{11}$$

構成粒子から複合粒子が形成される場合など、質量が減少する。

このとき、次の量をこの複合粒子の結合エネルギー(binding energy)という。

$$BE \equiv \Delta M \cdot c^2 = [\sum_i m_i - M] \cdot c^2 \tag{12}$$

6.2 陽子と電子の複合体として水素原子

自由な陽子と電子から水素原子という複合粒子が形成される場合の質量欠損を考える。

陽子の質量と速度をそれぞれ m_p, v_p とし、電子の質量と速度をそれぞれ m_e, v_e ,中性の水素原子の質量 M_H とする。陽子と電子からなる複合粒子の重心 G から､陽子までの距離を r_p ,電子までの距離を r_e とすると、エネルギー保存則とその近似的表現は

$$
\begin{aligned}
M_H c^2 &= \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_p}{c}\right)^2}} + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_e}{c}\right)^2}} - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)} \\
&\approx m_p c^2 + \frac{1}{2} m_p v_p^2 + m_e c^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 - k_0 \frac{e^2}{(r_p + r_e)}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

となる。ここで、k_0 は電気力(クーロン力)の比例係数で、MKSA 単位系の場合には、真空

の誘電率ε_0を用いて、$k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$と表される。

ここで、水素原子が形成される場合の質量欠損は

$$\Delta m \equiv m_p + m_e - M_H = -\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}m_p v_p^2 + \frac{1}{2}m_e v_e^2 - k_0\frac{e^2}{(r_p+r_e)}k_0\right] \qquad (14)$$

と計算される。また、結合エネルギーは

$$BE \equiv \Delta m \cdot c^2 = -\left[\frac{1}{2}m_p v_p^2 + \frac{1}{2}m_e v_e^2 - k_0\frac{e^2}{(r_p+r_e)}k_0\right] \qquad (15)$$

と表される。この結果は質量が欠損して結合エネルギーとなると解釈できる。この結合エネルギーは結局、(基底状態の)全エネルギー、すなわち、運動エネルギーとポテンシャルの和にマイナス符号をつけたものに等しい。この数式表現をみる限り，マイナスの値をもつように見えるかもしれないが、実はプラスの値をもつことが次のようにしてわかる。陽子と電子は共通の重心Gの周りを円運動すると考えると、運動方程式(ベクトル関係式)の中心向き成分は、それぞれ

$$m_p\left(\frac{v_p^2}{r_p}\right) = k_0\frac{e^2}{(r_p+r_e)^2} \qquad (16)$$

$$m_e\left(\frac{v_e^2}{r_e}\right) = k_0\frac{e^2}{(r_p+r_e)^2} \qquad (17)$$

となる。これらを用いて、$m_p v_p^2, m_e v_e^2$を消去すれば

$$BE = k_0\frac{e^2}{2(r_p+r_e)} \qquad (18)$$

となり、上述のように定義された結合エネルギーはプラスの値をもつことが確かめられる。

6.3　水素原子と酸素原子の化学反応により水が生成される場合のエネルギーと質量変化

質量m，速さvをもつ粒子の相対論的エネルギーEは次式で与えられる.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (19)$$

ここで，質量mをもつ複合粒子が質量と速さがそれぞれ m_1,v_1 と m_2,v_2 を持つ二つの粒子に自発的に分解する場合を考える．相対論的エネルギーの保存則より

$$mc^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} \qquad (20)$$

が成り立つ．この式の意味を考えるために，右辺を近似すると

$$\begin{aligned} mc^2 &= m_1c^2\left[1-(-\tfrac{1}{2})\left(\frac{v_1}{c}\right)^2+\cdots\right]+m_2c^2\left[1-(-\tfrac{1}{2})\left(\frac{v_2}{c}\right)^2+\cdots\right] \\ &\approx (m_1c^2+m_1c^2)+\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_1^2 \end{aligned} \qquad (21)$$

となる．すなわち質量変化に伴うエネルギー $[(m_1+m_1)-m]c^2 \equiv \Delta m\cdot c^2$ が運動エネルギーを生じていることになる．

このエネルギーがすべて発熱エネルギーQ に使用されたと近似すると

$$|\Delta m|c^2 = Q \qquad (22)$$

ここで，水素分子 1g の場合の $Q \approx 34000\times 4.18\mathrm{J}$ を代入すると

$$\begin{aligned} |\Delta m| &= \frac{Q}{c^2} \\ &= \frac{34000\times 4.18\mathrm{J}}{(3\times 10^8\mathrm{m/s})^{12}} \\ &\approx 1.6\times 10^{-9}\mathrm{g} \end{aligned} \qquad (23)$$

となり，1g に対して無視できる．すなわち，化学反応の場合，反応の前後で質量は（近似的に！）保存される，

6.3 原子核における質量欠損と結合エネルギー

量子力学（またはボーア模型）によれば、水素原子の結合エネルギーは約13 eV となり、電子の静止エネルギーの値 $m_ec^2 \cong 0.5\mathrm{MeV} = 500000\mathrm{eV}$ に比べれば十分に小さい。したがって、原子分子の世界を考える場合には無視することが多い。しかし、原子核の世界を考える場合には、質量欠損はかなり大きくなり、重要となる。