

崩壊定数 λ_A の原子 (核) A が崩壊してできた原子 (核) B が崩壊定数 λ_B の崩壊をする。時刻 $t = 0$ における原子 (核) A と B の個数をそれぞれ $N_{A0}, 0$ として次の問に答えよ。

1. 任意の時刻 t における原子 (核) A の個数 $N_A(t)$ と原子 (核) B の個数 $N_B(t)$ を求めよ。
2. 原子 (核) B の放射能の強さが最大になる時刻 $t_{\max}$ を求めよ。
3. 時刻 $t_{\max}$ において、A, B の両原子 (核) の放射能の強さは互いに等しいことを示せ。
4. $\lambda_A \ll \lambda_B$ の場合、十分長い時間が経過した時の A, B の両原子 (核) の個数の比 $N_B(t)/N_A(t)$ の近似式を求めよ。
5. 天然の鉱石中にはウラン原子 (核) (${}^{238}_{92}\text{U}$) が 2.78×10^6 個あたり 1 個の割合でラジウム原子 (核) (${}^{226}_{86}\text{Ra}$) が含まれている。 ${}^{226}_{86}\text{Ra}$ の半減期 $T_R = 1620\text{year}$ として ${}^{238}_{92}\text{U}$ の半減期 T_U を計算せよ。

[解答例]

1. 原子核 A は崩壊し、B に変わり、さらに B も崩壊するので

$$\begin{aligned} dN_A &= -\lambda_A N_A dt, \\ dN_B &= -\lambda_B N_B dt + \lambda_A N_A dt, \\ \rightarrow \frac{dN_A}{dt} &= -\lambda_A N_A, \\ \frac{dN_B}{dt} &= -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A \end{aligned} \quad (1)$$

が成り立つ。初期条件を考慮して、任意の時刻における原子核 A の個数が得られる。

$$N_A(t) = N_{A0} e^{-\lambda_A t}. \quad (3)$$

式 (3) を (2) に代入して、両辺に $e^{\lambda_B t}$ をかけると

$$\begin{aligned} \lambda_B N_B e^{\lambda_B t} + e^{\lambda_B t} \frac{dN_B}{dt} &= \lambda_A N_{A0} e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} \\ \rightarrow \frac{d}{dt} [e^{\lambda_B t} N_B] &= \lambda_A N_{A0} e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} \\ \rightarrow e^{\lambda_B t} N_B &= \int_0^t \lambda_A N_{A0} e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} dt \\ &= \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \right) N_{A0} [e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} - 1] \\ \rightarrow N_B(t) &= \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \right) N_{A0} [e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}] \end{aligned} \quad (4)$$

2. 核種 B の放射能の強さ $A_B(t)$ は $\lambda_B N_B(t)$ だから、その大きさが最大になるのは、個数 $N_B(t)$ が最大になるときだから、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dN_B}{dt} \\ &= - \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \right) N_A(0) \left[\lambda_A e^{-\lambda_A t_{\max}} - \lambda_B e^{-\lambda_B t_{\max}} \right] \\ \rightarrow e^{-\lambda_B t_{\max}} &= \frac{\lambda_A}{\lambda_B} e^{-\lambda_A t_{\max}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\rightarrow t_{\max} = \frac{\log_e \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A} \right)}{\lambda_B - \lambda_A}. \quad (6)$$

3. 核種 B の放射能の強さ $A_B(t)$ は $\lambda_B N_B(t)$ だから、式 (4) と (5) より

$$\begin{aligned} \lambda_B N_B(t_{\max}) &= \lambda_B \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \right) N_{A0} \left[e^{-\lambda_A t_{\max}} - e^{-\lambda_B t_{\max}} \right] \\ &= \lambda_B \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} \right) N_{A0} \left[e^{-\lambda_A t_{\max}} - \frac{\lambda_A}{\lambda_B} e^{-\lambda_A t_{\max}} \right] \\ &= \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t_{\max}} = \lambda_A N_A(t_{\max}). \end{aligned} \quad (7)$$

この結果は横軸に時間 t 、縦軸に放射能の強さ $\lambda N(t)$ をとった場合、原子核 A と B についてのグラフが交わる点において、B の放射能の強さ（そして個数も）が最大になり、かつそこで原子核 A, B の放射能の強さが等しいことを意味する。

4. 式 (3), (4) より

$$\begin{aligned} \frac{N_A(t_{\max})}{N_B(t_{\max})} &= \left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_A} \right) \frac{1}{1 - [e^{-\lambda_A t_{\max}} - e^{-\lambda_B t_{\max}}]} \\ \rightarrow &\approx \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \end{aligned} \quad (8)$$

5. 前問の結果と崩壊定数 λ と半減期 T の関係、 $T = \ln 2 / \lambda$ を用いて

$$\begin{aligned} T_U &= T_R \frac{N_U(t)}{N_R(t)} \\ &= 1620 \text{ year} \times \frac{2.78 \times 10^6}{1} \\ &= 4.5 \times 10^9 \text{ year}. \end{aligned} \quad (9)$$

すなわち、ウラン 238 核の半減期は約 45 億年である。（これは地球の推定年令とほぼ同じで、われわれの宇宙の推定年令約 140 億年と矛盾しない結果である。）